

結合力モデル解析における J 等価 Dugdale モデルの 妥当性に関する解析的検証

ANALYTICAL VERIFICATION ON PROPRIETY OF J -INTEGRAL EQUIVALENT DUGDALE MODEL IN COHESIVE FORCE MODEL ANALYSES

村上 聖*, 岸谷孝一**, 平居孝之***

Kiyoshi MURAKAMI, Koichi KISHITANI and Takayuki HIRAI

An analytical verification was conducted concerning the propriety of the method which is called J -integral equivalent Dugdale model here. The present model can be analyzed based on linear elasticity by means of substituting Dugdale model with the same J -integral value for any relation between cohesive force and crack opening displacement in the cohesive force model. Since the cohesive force model is a non-linear elastic one, a load-displacement curve after cracking must agree with a curve which links cracking points for different pre-crack lengths. As the result of the analytical verification, a good agreement between them was obtained considering the errors of Dugdale model analyses.

Keywords : cohesive force model, Dugdale model, J -integral, crack opening displacement, crack mouth displacement

結合力モデル, Dugdale モデル, J 積分, き裂開口変位, き裂口変位

1. はじめに

コンクリートの引張破壊過程の特徴が、主ひび割れ先端前方でのマイクロクラックの累進的発生に起因した破壊過程域 (fracture process zone) の局所化にあることから、幅の狭い破壊過程域の進展を、仮想のき裂面にその開口に抵抗する力 (結合力) が作用するモデルで近似した結合力モデル (cohesive force model) のコンクリートへの適用性が注目され、コンクリートのひび割れ伝播挙動の非線形解析や、逆解法に基づいた破壊過程域内部の引張りひずみ軟化構成法則 (結合力-き裂開口変位関係) の推定による引張破壊機構の解明などが、最近のコンクリートの破壊力学的研究の動向となっている。

筆者らは、任意の結合力-き裂開口変位関係を、与えられたき裂開口変位に対して J 積分が等価になるように一定の結合力が仮想き裂面に作用する Dugdale モデルに置き換えることにより、非線形問題を線形化する手法 (J 等価 Dugdale モデル) をすでに提案している¹⁾。これによれば、逆解法により、材料定数として寸法効果の小さいヤング係数のみで破壊過程域内部の構成法則を

一意的に決定することができる²⁾。しかしながら、「 J 等価 Dugdale 手法の問題点として、任意のモデルと J 積分を等価にして Dugdale モデル解析を行った結果の荷重、き裂口変位、仮想き裂長さが、元のモデルとどの程度等価なのかということが挙げられる」という指摘³⁾に対して、その回答として、有限要素法や境界要素法などによる応力拡大係数の解析において、要素分割の精粗がき裂先端近傍の応力分布状態にかなりの影響を及ぼす、すなわち実際の応力分布状態と異なるにもかかわらず、荷重-変位関係に基づいたエネルギー法や J 積分法によれば、き裂先端近傍の要素分割の精粗、すなわち応力分布状態の違いが、応力拡大係数の解析精度に及ぼす影響は小さい⁴⁾ことを一例として挙げた。しかし、以上の根拠を非線形域にまで拡張適用しうるかどうかについては、いまのところ理論的に検証することは困難である。そこで、本研究では、その妥当性を解析的に検証することを試みる。また、ここで述べる検証方法は、これまでに提案されているモデルの妥当性ならびに精度を確かめるために利用できるものと考えられる。

* 熊本大学工学部建築学科 助教授・工博

** 日本大学工学部建築学科 教授・工博

*** 大分大学工学部 教授・工博

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering Kumamoto Univ., Dr. Eng.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering Nihon Univ., Dr. Eng.

Prof., Faculty of Engineering Oita Univ., Dr. Eng.

2. 解析方法

2.1 Dugdale モデル解析

Dugdale モデルは、き裂先端前方の塑性域内部の構成法則を完全弾塑性とし、結合力をき裂開口変位によらず一定の降伏強度と仮定しているため、その解析は線形弾性破壊力学で扱える。以下では、片側にき裂をもつはりの3点曲げ（スパン・高さ比=3）について解析方法並びに結果を示す。

図-1に示すように、モデル (a) (Dugdale モデル) の応力および変位場は、モデル (b) および (c) のそれらを線形弾性的に重ね合わせることで求められる。そのとき、モデル (a) において仮想き裂先端で、もはや応力の特異性を生じない条件（応力の連続条件）から、モデル (b) および (c) におけるき裂先端の応力の特異項が互いに打ち消し合うように重ね合わせる必要がある。すなわち、き裂先端の応力の特異性は応力拡

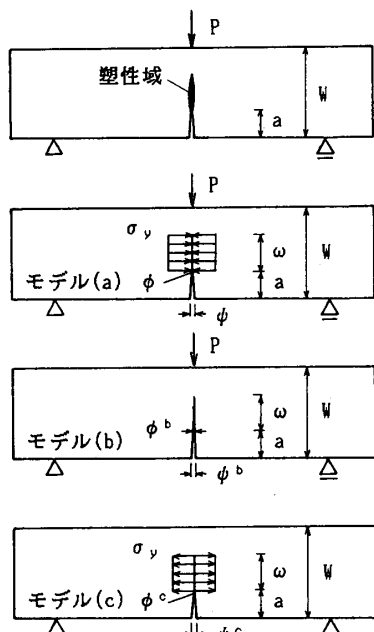


図-1 Dugdale モデル解析方法

大係数により表されるので、モデル (b) および (c) における応力拡大係数を等置することにより、与えられたき裂長さ (a) に対して、仮想き裂長さ (ω), 降伏強度 (σ_y), 外力 [ここでは、公称曲げ応力度 (σ_b) で表す] の間に一意的な関係が得られる。また、モデル (a) におけるき裂先端開口変位 (φ) およびき裂口変位 (ψ) は、モデル (b) および (c) において対応する変位を、与えられた外力条件の下で重ね合わせることで求められる。

以上のようにして計算された Dugdale モデル解析結果を表-1に示す。ここで、薄墨部分の値は、新たに解析を行って求めたものである¹⁾。解析には、間接境界要素法を利用した。また、σ_b, φ, ψ は、後の解析に便利なるように、次に示す無次元パラメーター Σ, Φ, Ψ で表示している。

$$\Sigma = \sigma_b / \sigma_y, \quad \Phi = (E \cdot \phi) / (\sigma_y \cdot W), \quad \Psi = (E \cdot \psi) / (\sigma_y \cdot W)$$

ここに、E: ヤング係数, W: はりせいである。

2.2 J 等価 Dugdale モデル解析

いま、図-2に示すように、任意の結合力-き裂開口変位関係が与えられたとする。そのとき、与えられたき裂開口変位 (φ₁) に対して同一の J 積分（結合力-き裂開口変位曲線下の面積）を与えるような等価降伏強度 (σ_y) を求め、Dugdale モデルを逐次設定して解析を行う手

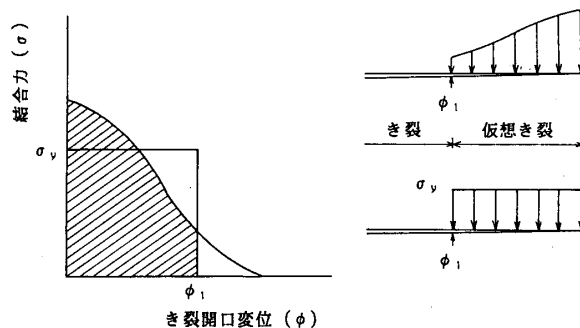


図-2 J 等価 Dugdale モデルの基礎概念

表-1 Dugdale モデル解析結果

a/W	ω/W	Σ	Φ	Ψ	a/W	ω/W	Σ	Φ	Ψ	a/W	ω/W	Σ	Φ	Ψ
0.10	0.05	0.616	0.114	0.387	0.30	0.05	0.362	0.126	0.805	0.50	0.05	0.210	0.133	1.330
	0.10	0.835	0.239	0.602		0.10	0.513	0.280	1.253		0.10	0.301	0.314	2.130
	0.15	0.988	0.388	0.810		0.15	0.629	0.480	1.700		0.15	0.373	0.578	3.008
	0.20	1.119	0.564	1.043		0.20	0.729	0.733	2.206		0.20	0.436	0.956	4.107
	0.25	1.237	0.779	1.316		0.25	0.818	1.053	2.802		0.25	0.494	1.523	5.612
	0.30	1.349	1.049	1.649		0.30	0.902	1.478	3.549		0.30	0.550	2.440	7.880
	0.35	1.452	1.379	2.049		0.35	0.981	2.054	4.523		0.35	0.603	4.104	11.74
	0.40	1.553	1.809	2.561		0.40	1.057	2.866	5.851		0.40	0.655	7.716	19.72
	0.45	1.649	2.354	3.203		0.45	1.141	4.064	7.743					
	0.50	1.747	3.078	4.047		0.50	1.203	5.950	10.68					
0.55	1.844	4.062	5.180	0.55	1.273	9.344	15.82							
0.60	1.926	5.442	6.755	0.60	1.342	16.49	26.46							
0.65	2.034	7.466	9.056											
0.70	2.104	10.60	12.63											
0.75	2.188	16.19	18.93											
0.80	2.272	27.79	31.94											

* a: き裂長さ, W: はりせい, ω: 仮想き裂長さ, Σ = σ_b / σ_y, Φ = (E · φ) / (σ_y · W), Ψ = (E · ψ) / (σ_y · W), σ_b: 公称曲げ応力度, σ_y: 降伏強度, E: ヤング係数, φ: き裂開口変位, ψ: き裂口変位

法をここでは J 等価 Dugdale 手法と称し、本解析のフローチャートを図-3に示す。

2.3 モデルの検証方法

結合力モデルは、一種の移動境界値問題に属し、実体は弾性モデルであるから、き裂発生以後の荷重-変位関係は、き裂を順次切断し負荷したときのき裂発生点を包絡する経路をたどるはずである。したがって、モデルの妥当性は、き裂発生以後の荷重-変位関係の計算値と、異なるき裂長さについて計算されたき裂発生点の包絡線との一致性を調べることにより検証される。ただし、結合力モデルと実際の材料におけるき裂発生以後の状態との対応は、本研究の考察の範囲外であるが、き裂の安定成長時の不可逆過程で弾性エネルギー解放率としての J 積分が物理的意味を失うことに対応して、き裂が発生し

た後の結合力モデルの適用には限界があるものと考えられる。これに関しては、逆解法による構成法則の推定において、荷重-変位関係の推定区間の拡大につれて推定される軟化曲線下の面積（破壊エネルギー）も拡大してゆくことが示されている⁵⁾。ただし、文献5)では、これを破壊エネルギーの寸法効果ととらえているが、筆者らは、これは結合力モデルの適用範囲を超えて（き裂発生以後）モデルを適用したことによる見かけのものであると考えている。

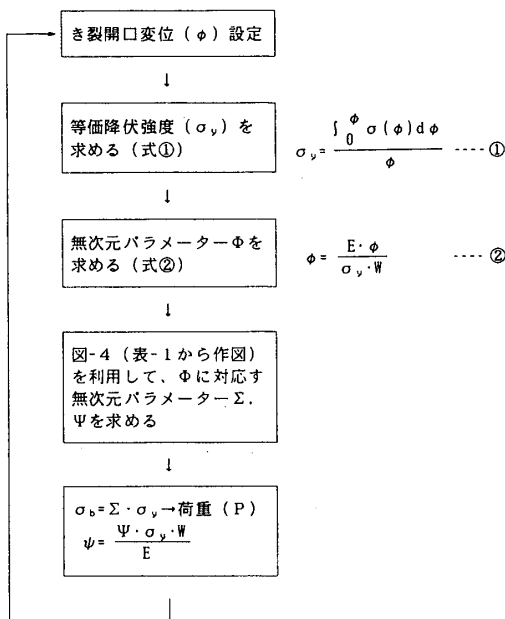


図-3(a) J 等価 Dugdale モデル解析 (I)

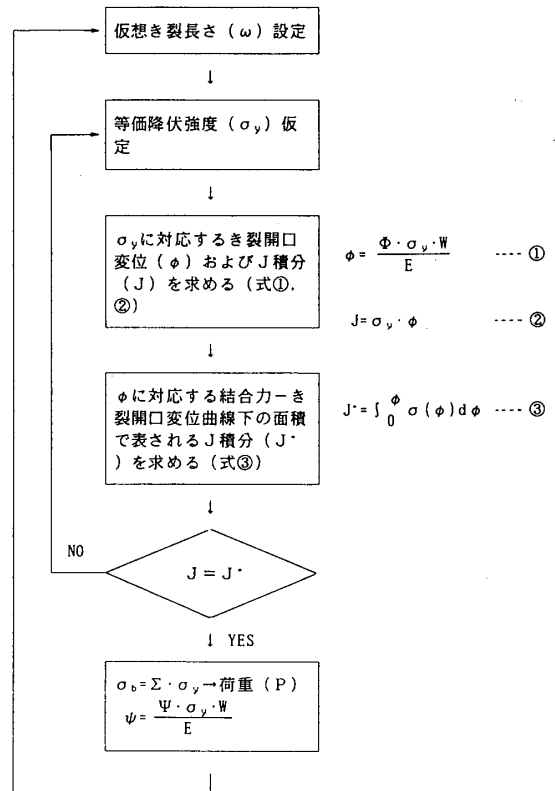


図-3(b) J 等価 Dugdale モデル解析 (II)

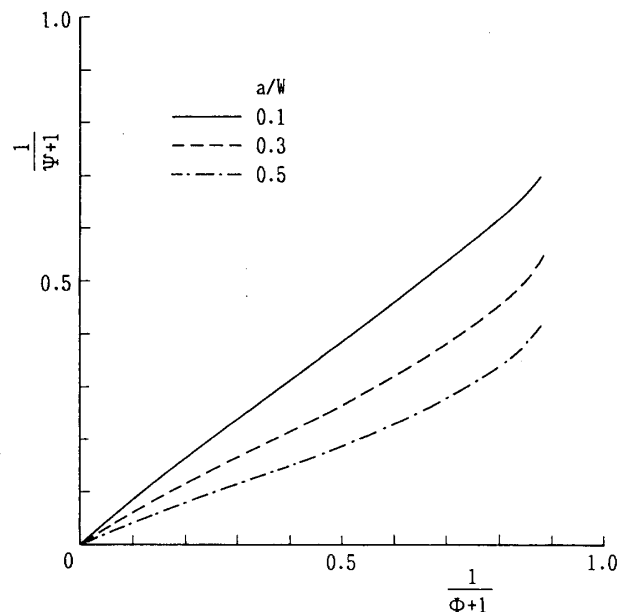
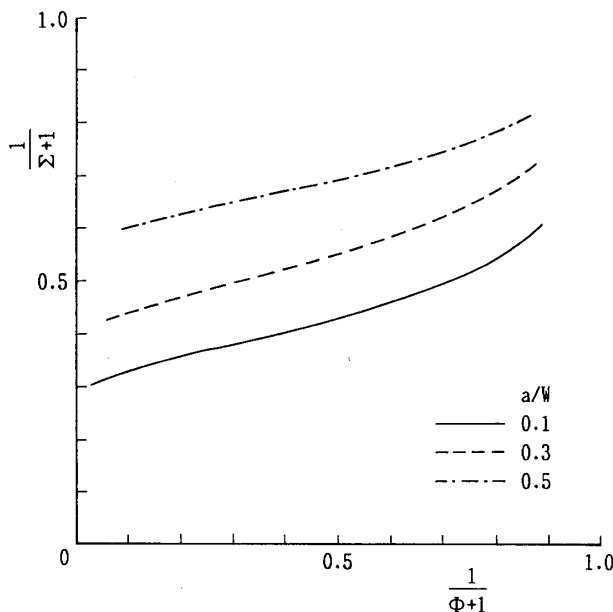


図-4 Dugdale モデル解析結果

3. 解析結果および考察

本手法の妥当性を調べるために、図-5 に示す結合力一定の場合について計算された荷重-き裂口変位関係を図-6 に示す。ここで、構成法則として結合力一定を採用したのは、き裂発生点（結合力一定の場合には、最大荷重点がき裂発生点となる）までの計算値は、Dugdaleモデル解析そのものであるから、解析誤差は別としてその妥当性がいえるからである。この図からわかるように、仮想き裂を含めた全体のき裂長さ $(a+\omega)$ がはりせいに対して約 0.7 まで、き裂発生点後の荷重-変位関係の計算値と、き裂発生点を包絡する経路との間に妥当な一致がみられる。しかし、全体のき裂長さがそれ以上の大きい範囲においてその一致が悪くなっている。これは、図-1 に示すモデル (b) および (c) における応力拡大係数およびき裂口変位の解析精度が、き裂長さの大きい範囲で悪くなるためであると考えられる。

そこで、Dugdale モデル解析の誤差を以下のように

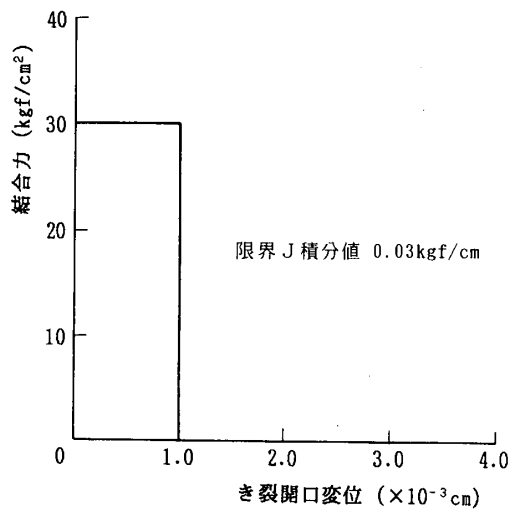


図-5 結合力-き裂開口変位関係 (結合力一定)

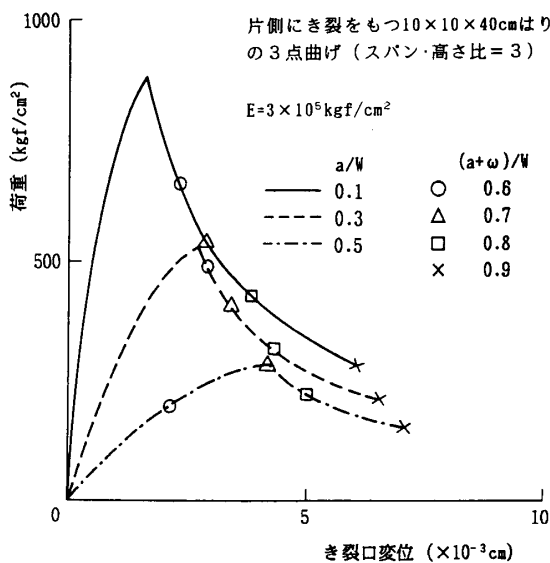


図-6 荷重-き裂口変位関係の計算値

推定し、その結果に基づいて修正された荷重-き裂口変位関係について、き裂発生点を包絡する経路との一致性を調べる。

Dugdale モデルは、図-1 のモデル (b) および (c) を線形弾性的に重ね合わせるにより計算されるので、モデル (b) および (c) における応力拡大係数およびき裂口変位の解析誤差がわかれば、Dugdale モデル解析の誤差を求めることができる。しかし、今回利用した 3 点曲げ (スパン・高さ比=3) やき裂面の一部に表面力が作用する問題については、応力拡大係数およびき裂口変位の厳密解は得られていないので、ここでは前者については純曲げ、後者については一様引張に関する解析誤差と同程度であるとみなして、Dugdale モデル解析の誤差を推定した。

○ 応力拡大係数

$$\text{モデル (b)} \quad K_I^b = \sigma_b \sqrt{A} Y^b$$

$$\text{モデル (c)} \quad K_I^c = \sigma_y \sqrt{A} Y^c$$

ここに、 σ_b : 公称曲げ応力度、 σ_y : 降伏強度、 $A=a+\omega$: 全体のき裂長さ、 Y^b, Y^c : 形状関数である。

また、

$$Y^{b*} = Y^b (1 + \epsilon_Y^b)$$

$$Y^{c*} = Y^c (1 + \epsilon_Y^c)$$

ここに、 Y^{b*}, Y^{c*} : 解析値、 Y^b, Y^c : 厳密解、 $\epsilon_Y^b, \epsilon_Y^c$: 解析誤差である。

図-7 に、片側にき裂をもつはりの純曲げおよび一様引張に関する応力拡大係数の解析誤差を示す。この図か

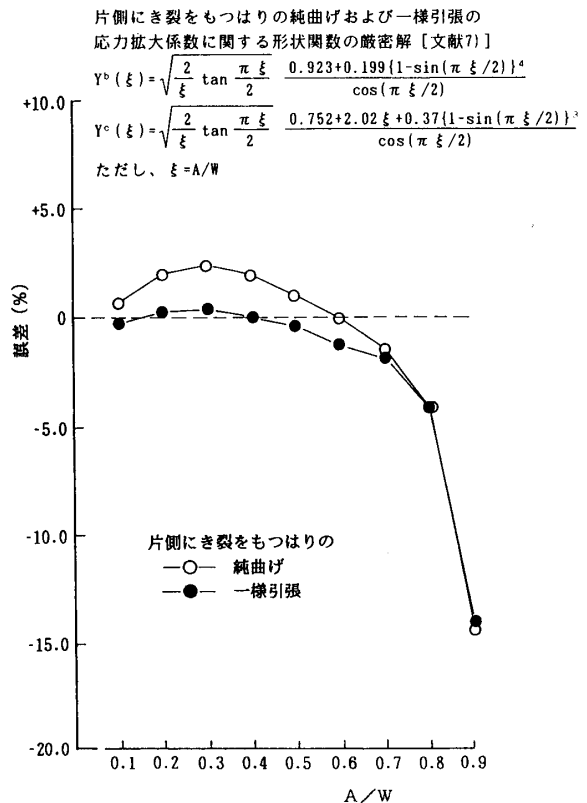


図-7 応力拡大係数の解析誤差

ら、き裂長さが約0.7以上の大きい範囲で解析精度は急激に悪くなるのがわかる。

○荷重（公称曲げ応力度）の解析誤差

仮想き裂先端での応力の連続条件より、 $K_I^b = K_I^c$ だから、

$$\frac{\sigma_b^*}{\sigma_b} = \frac{1 + \epsilon_V^c}{1 + \epsilon_V^b} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 σ_b^* ：解析値、 σ_b ：厳密解である。

図-8に、Dugdale モデルにおける公称曲げ応力度の解析誤差の推定値を示す。この図から、荷重の解析誤差は、モデル (b) および (c) の応力拡大係数の解析誤差が同程度であるために、それほど大きくないことがわかる。

○き裂口変位

モデル (b) $\psi^b = \frac{4 \sigma_b \cdot A}{E} V^b$

モデル (c) $\psi^c = \frac{4 \sigma_V \cdot A}{E} V^c$

ここに、 E ：ヤング係数、 V^b, V^c ：形状関数である。

また、

$$V^{b*} = V^b (1 + \epsilon_V^b)$$

$$V^{c*} = V^c (1 + \epsilon_V^c)$$

ここに、 V^{b*}, V^{c*} ：解析値、 V^b, V^c ：厳密解、 $\epsilon_V^b, \epsilon_V^c$ ：解析誤差である。

図-9に、片側にき裂をもつはりの純曲げおよび一様引張に関するき裂口変位の解析誤差を示す。この図から、応力拡大係数と同様に、全体のき裂長さが約0.7以上になると、解析誤差が急激に大きくなるのがわかる。

○き裂口変位の解析誤差

$\psi = \psi^b - \psi^c$ だから、

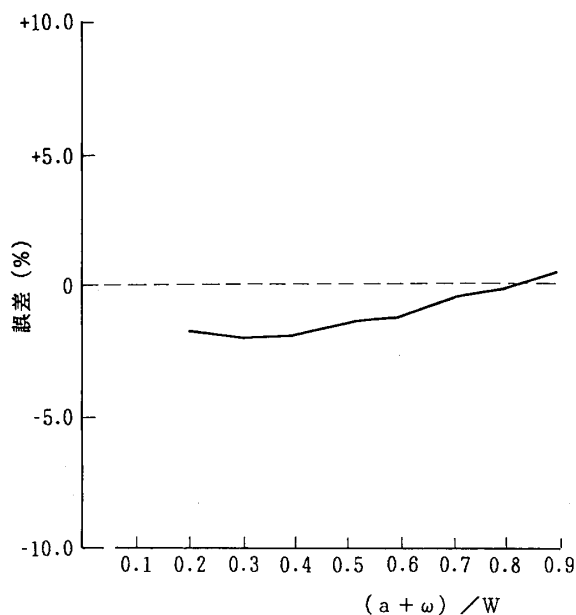


図-8 Dugdale モデルにおける公称曲げ応力度の解析誤差の推定値

$$\frac{\psi^*}{\psi} = \frac{Q \cdot S \frac{(1 + \epsilon_V^c)(1 + \epsilon_V^b)}{(1 + \epsilon_V^c)} - (1 + \epsilon_V^c)}{Q \cdot S - 1} \dots\dots\dots (2)$$

片側にき裂をもつはりの純曲げおよび一様引張のき裂口変位に関する形状関数の厳密解 [文献7]

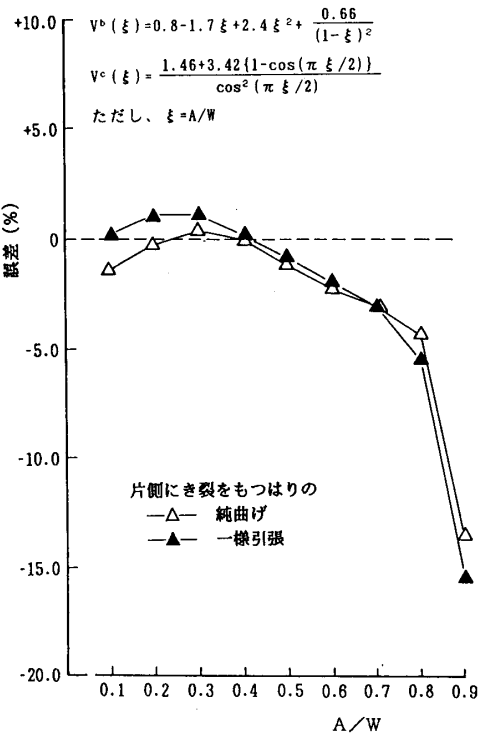


図-9 き裂口変位の解析誤差

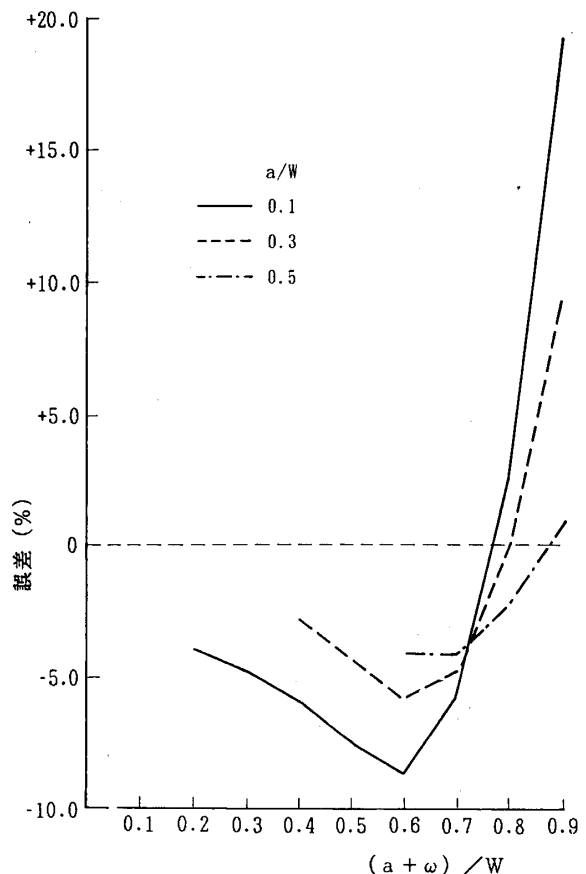


図-10 Dugdale モデルにおけるき裂口変位の解析誤差の推定値

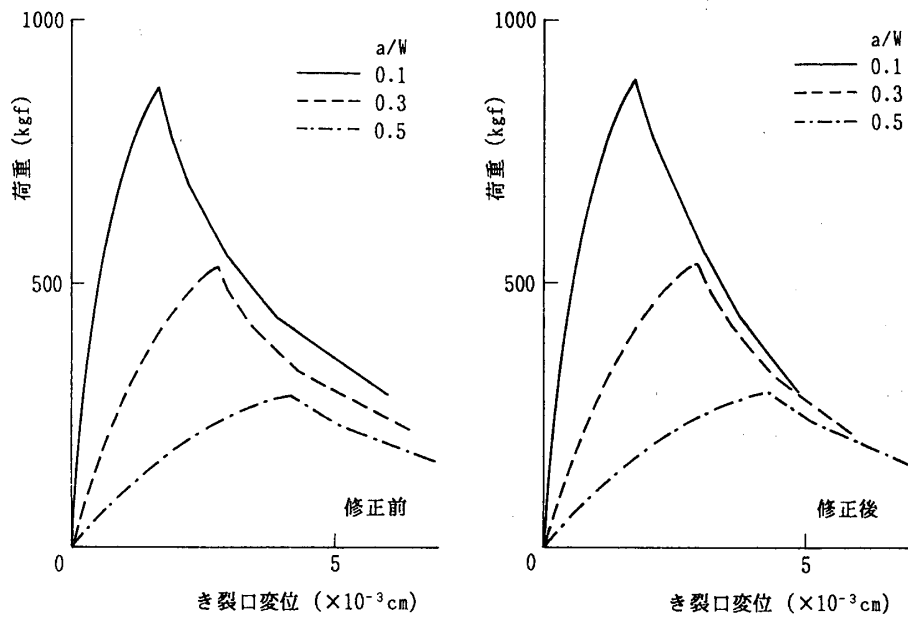


図-11 Dugdale モデルの解析誤差に基づいて修正された荷重-き裂口変位関係

ここに、 ψ^* : 解析値、 ψ : 厳密解、 $Q = Y^c/Y^b$ 、 $S = V^b/V^c$ である。

図-10に、Dugdale モデルにおけるき裂口変位の解析誤差の推定値を示す。この図から、き裂口変位の解析誤差は、式(3)に示すようにモデル(b)および(c)の応力拡大係数およびき裂口変位の解析誤差が複合するために、全体的に大きく、またき裂長さ(a)が小さいほど大きくなっていることがわかる。

以上のDugdale モデル解析の推定誤差に基づいて修正された荷重-き裂口変位関係を図-11に示す。この図から、修正されたき裂発生以後の荷重-変位関係と、き裂発生点を包絡する経路との間に全体のき裂長さが大きい範囲においても妥当な一致が得られることがわかる。このことから、 J 積分を等価にすれば、仮想き裂面の作用する結合力分布の違いは、荷重-変位関係に影響を及ぼさないことを前提とした J 等価Dugdaleモデルの妥当性が解析的に検証されたものと考えられる。

4. まとめ

結合力モデルにおいて、 J 積分を等価にすれば、仮想き裂面に作用する結合力分布の違いは、荷重-変位関係に影響を及ぼさないことを前提として、任意の結合力-き裂開口変位関係を、 J 積分が等価になるように一定の結合力が仮想き裂面に作用するDugdaleモデルに置換して、非線形問題を線形化する手法(J 等価Dugdaleモデル)の妥当性について、き裂発生以後の荷重-変位関係と、き裂を順次切断し負荷したときのき裂発生点を包絡する経路との一致性を調べることにより、解析的に検証を行った。その結果として、全体のき裂長さが大きい範囲において一致性が悪くなるのは、Dugdale モデ

ル解析の誤差に起因するものであり、その誤差を考慮すれば、妥当な一致が得られることが示され、本手法の妥当性が確かめられた。今後、さらに本手法の適用性を高めるためには、Dugdaleモデルの解析精度の向上をはかる必要があるが、現時点でもき裂長さが約0.3以上の範囲では、荷重に関して高々3%、変位に関して高々10%の誤差内であり、十分有効であると考えられる。

参考文献

- 1) 岸谷孝一ほか2名: コンクリートの破壊力学に関する研究—その1. 破壊過程域の損傷解析—, 日本建築学会構造系論文報告集, 第368号, pp.11~17, 1986.10
- 2) 村上 聖ほか4名: 繊維補強コンクリートの破壊力学に関する研究—その1. 各種繊維による補強効果—, 日本建築学会構造系論文報告集, 第404号, pp.1~6, 1989.10
- 3) 和泉正哲ほか2名, 岸谷孝一ほか2名: 「コンクリートの破壊力学に関する研究—その1. 破壊過程域の損傷解析—」に対する討論, 日本建築学会構造系論文報告集, 第374号, pp.112~115, 1987.4
- 4) 村上 聖ほか2名: 境界要素法の破壊力学問題への適用— J 積分法による応力拡大係数の解析—, 日本建築学会構造系論文報告集, 第404号, pp.25~31, 1989.10
- 5) 加藤敏史ほか4名: 区間最適化手法に基づくコンクリートの破壊エネルギーの寸法依存性の解析(その1. 解析手法), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.211~212, 1990.10
- 6) 鈴木 篤ほか4名: 区間最適化手法に基づくコンクリートの破壊エネルギーの寸法依存性の解析(その2. 解析結果), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.213~214, 1990.10
- 7) 岡村弘之著: 線形破壊力学入門, 培風館, 1976

(1990年11月10日原稿受理, 1991年6月15日採用決定)