日本建築学会中国・九州支部
研究報告　第6号　昭和59年3月

境界要素法による弾性体の応力と変形の数値解の精度

正会員　平居孝之

1　はじめに

境界要素法は、工学で問題になる種々の物理量を解析するための有用な数値計算方法であることが認めつつある。弾性体に生じる応力と変形の解析は、境界要素法の発展が期待される分野の1つである。

理論解の分らない問題を数値的に解析し、工学の実際問題に利用しょうとする場合は、数値解の信頼性を確かめなくてはならない。数値解の信頼性は、実在の物理量を数値計算にのせるために設定した仮定の正当性と計算結果の数値上の精度から判断される。前者はすべての数値計算方法に共通した問題点であるが、後者は個々の数値計算方法に特有の問題点である。境界要素法の計算結果の精度について、これまで理論解やFEMの解と比較した研究が多数報告されているが、境界要素法の計算結果に含まれる誤差について、その理由や検定方法などを調べた研究は少ない。ここでは、直接法および間接法による計算結果の精度について、静的平衡状態、線形弾性、均質等方法、微少変形の仮定のもとに考察する。

2　直接法の数値解の精度

直接法は、問題と同じ領域における既知の平衡状態（これが基本解と呼ばれる）を用意しておき、これと解こうとしている問題の平衡状態の間に(1)式の相反作用の原理を表す積分方程式を導き、問題の未知の境界値を計算する方法である。

$$-\int_{S_2} \overset{*}{T}\cdot \underline{u}\, ds + \int_{S_1} \overset{*}{u}\cdot \underline{T}\, ds = \int_{S_1} \overset{*}{T}\, u\, ds - \int_{S_2} \overset{*}{u}\, T\, ds - \int_{v} \overset{*}{u}\, F\, dv \qquad (1)$$

ここで、Tは表面力、uは変位、Fは物体力、S_1は基本境界、S_2は自然境界、vは領域、*は基本解、アンダーラインは未知数を表す。(1)式を境界要素で離散化して構成した連立1次方程式の根である未知の境界値の計算結果の精度は、数値積分の誤差と境界値の分布状態を表す関数の誤差によって決まる。

2.1　数値積分の誤差

数値積分の誤差の影響を除くには、解析積分によるのが最善であるが、比較的低次の要素であってもすでに報告しているように[1]、複雑な解析式を導入しなければならない。数値積分誤差が顕著に生じるのは、基本解の特異点の近傍の要素であるため、この要素についてだけ解析的に積分し、そうでない要素については、数値積分するのが一般的である[2,3]。基本解の特異点を境界から離れた外側に位置させるRegular Boundary Integral Equation Methodがある[4]。この方法は、基本解の特異点に起因する数値積分の誤差の対策に有効であるが、問題自体の持つ特異点に起因する誤差に対して効果がない。表1のように[5]、特異点を境界上に位置させるSingular Boundary Integral Equation Methodと解析の境界積分を組み合せるのが適切である。

2.2　境界値の分布状態を表す関数の誤差

問題の境界値の分布状態と採用した関数の間の誤差は、関数が低次であるほど大きい。計算結果の精度に関して、関数の次数の選び方は、効率の問題ではなく、ある程度高次にする必要がある[1]。この理由は、要素ごとに表面力の合計と1次モーメントが等価であるような関数のとき、計算結果の精度が良く、そうでない場合は、要素を多くしても精度が要素の数に応じて向上しないからである。

表1　直接法の精度（○:良　×不良）

問題	特異点のない場合		特異点のある場合	
境界積分	数値積分	解析積分	数値積分	解析積分
Singular Boundary Integral Equation Method	×	○	×	○
Regular Boundary Integral Equation Method	○	○	×	×

2．3　連立方程式の性質

未知の境界値を計算するための連立方程式は、未知数に付く係数および定数項に、前述の数値積分の誤差と分布関数の誤差を含んでいる。また定数項は、(1)式の右辺で表されるように、境界条件で与えられた境界値に基本解の境界値をかけたものを要素ごとに積分し、それらの値の代数和として計算されるので、有効数字の桁落ちによる誤差が生じる。係数だけでなく定数項にも誤差を含む連立方程式を用いることは、直接法の大きな特徴であり、FEMや次で述べる間接法に比べると、解の精度に関して不利である。

2．4　解の信頼性

採用した関数で境界値の分布状態を完全に表せる場合は、有効数字による誤差だけを含んだ理論解を導けるのが、直接法の長所である。一方、汎用性を目的として、比較的低次の関数で境界値の分布状態を表し境界に多数の要素を設定し境界条件を近似する方法の場合は、解に含まれる誤差を検定する方法が無い。

3　間接法の数値解の精度

間接法は、間接境界積分方程式または重ね合せの原理に基づく解法である。間接境界積分方程式と間接法は、解法の原理は異なるが数値計算過程は同一である[5,6]。問題と同じ領域に関する既知の平衡状態（これを基本解と呼ぶ）を複数個重ね合せて、境界条件を近似的に満足させて解を導く。境界条件を再現するのに必要な基本解の荷重の大きさを未知数として計算する方法である。

3．1　基本解の種類と境界条件の再現

境界条件の再現を高次の条件で行うと計算結果の精度は向上するが、汎用性という観点からは、要素ごとに合計と1次モーメントが等価であるように行うのが適切であり、この方法で二次元問題について精度の良い解が得られることをすでに報告している[5]。選点法と称せられるように、境界上の数点で境界条件と一致させる場合は、境界値の合計と1次モーメントの両方に誤差が生じ、計算結果の精度の悪い場合が多い。合計と1次モーメントが等価である分布状態は線形分布であり、基本解としては図1の線形分布の重み荷重のものが適切である。このほか問題の特異性を扱うために集中荷重や、また重み荷重でなく重み変位を与える基本解なども有効である。

3．2　誤差の原因と対策

図1に示された基本解の応力度と変位は解析的に導せれるが、境界要素をあてはめたときの要素上の分布状態を表す解析式はまだ得られていない。このため、境界条件の再現において要素上で数値積分するときの誤差が生じる。これが計算結果の全体的な誤差になる。境界値の分布状態を線形で再現すると、要素ごとに局部的な分布状態の誤差が出る。これは要素の近傍についてだけ影響し、全体的な精度には影響しない。このような誤差が顕著であるのはコーナーや特異点の付近であり、その近くの境界だけを細分割して要素を設定することにより、精度を向上することができる。また、コーナーの頂点付近の精度の悪いことが従来から問題にされているが、図2に示すように、コーナーの頂点が基本解に作用する荷重の分布域の中間に位置するよう計算すれば、計算結果の精度がきわめてよくなる。

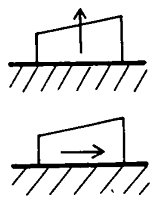


図1　間接法の線形分布の重み荷重の基本解

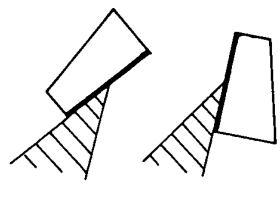


図2　コーナーにおける基本解の適用

3．3　解の信頼性

数値的に実在する平衡状態を重ね合わせた計算結果は、重ね合わせの原理により数値的に実在する平衡状態である。従って、計算結果の境界値と境界条件で与えられた境界値の差を調べることにより、精度を検定することができる。このように、理論解の分からない問題であっても、計算結果の精度に関する信頼性を判断できるのが、間接法の特筆すべき長所である。

4 三次元問題における精度

三次元問題の経済的な解法として境界要素法が注目されている．高次の要素を少数設定したモデルを用いた直接法で計算した事例の報告はあるが、汎用性を重視して比較的低次の要素を多数用いる計算例は少ない．そこで要素数の多い場合の計算に適する間接法で、三次元問題を解き、計算結果の精度を調べる。

4．1 計算法と計算式

三次元の無限領域の1点に集中荷重が作用したときの基本解を用い、境界を分割した四辺形要素の重心において境界条件を再現する．即ち選点法であり、境界条件の再現で要素ごとの合計と1次モーメントは共に誤差を含む。基本解の荷重の作用点以外の応力度と変位は与えられている[2]。荷重の作用点ではこれらの値が発散するので合計と作用方向の等しい等分布荷重が四辺形要素に作用したときの、要素の重心の応力度と変位を用いる．

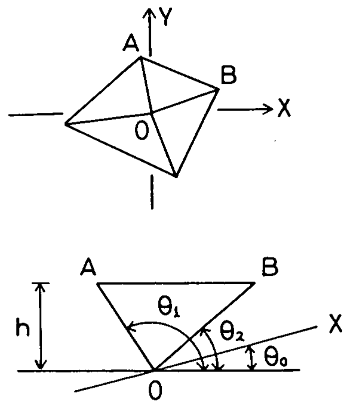


図 3

図3のように、四辺形要素を重心が共通の頂点Oである4つの三角形に分ける。1つの三角形について、その面内に頂点Oを原点とする二次元の座標を考え、頂点Oの対辺に平行な方向を基準にして角度を測り、θ_0 θ_1 θ_2とする。θ_0は元の四辺形の面内に設定した基準座標のX軸の方向である。重み荷重は、X方向Y方向および紙面のこちら向きのZ方向の3種類である．hは頂点Oから対辺までの距離である。次の値を4つの三角形のそれぞれで計算しその合計を$\Sigma\varphi_1$ $\Sigma\varphi_2$ $\Sigma\varphi_3$で表す。
$\varphi_1 = h\left\{-\cos^2\theta_0 \ln\left|\tan\frac{\theta_2}{2}/\tan\frac{\theta_1}{2}\right| - \cos(\theta_2-2\theta_0) + \cos(\theta_1-2\theta_0)\right\}$、
$\varphi_2 = h\left\{-\sin(\theta_2-2\theta_0) + \sin(\theta_1-2\theta_0) + \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 \ln\left|\tan\frac{\theta_2}{2}/\tan\frac{\theta_1}{2}\right|\right\}$、
$\varphi_3 = h\left\{-\ln\left|\tan\frac{\theta_2}{2}/\tan\frac{\theta_1}{2}\right|\right\}$。Eはヤング率、$\nu$はポアソン比、$a_1 = (1+\nu)/\{8(1-\nu)\pi E\}$、四辺形の面積$=A_0$、$\sigma$は応力度、$U$は変位とする。X方向の重み荷重$W_X$について、$\sigma_{ZX} = \sigma_{XZ} = W_X/(2A_0)$、他の応力度$=0$、$U_X = a_1\{\Sigma\varphi_1 + (3-4\nu)\Sigma\varphi_3\}W_X/A_0$、$U_Y = a_1\Sigma\varphi_2 W_X/A_0$、$U_Z = 0$。Y方向の重み荷重$W_Y$について、$\sigma_{YZ} = \sigma_{ZY} = W_Y/(2A_0)$、

要素数194，E=100，ν=0.25，
CPU 87.2s (FACOM-M200)
境界条件：$-8 \leqq Z \leqq 8$ の側面で要素に垂直な方向の表面力10、その他はすべて表面力 0

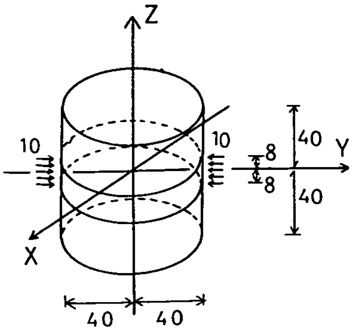


図4 例題1

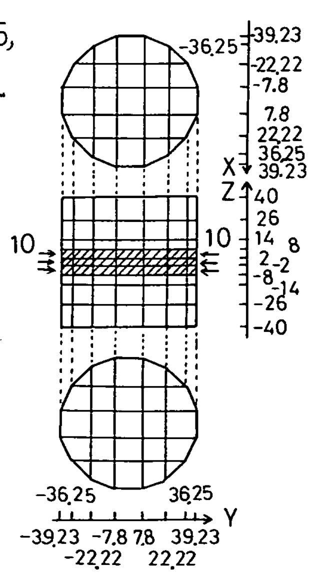


図5 例題1のモデル

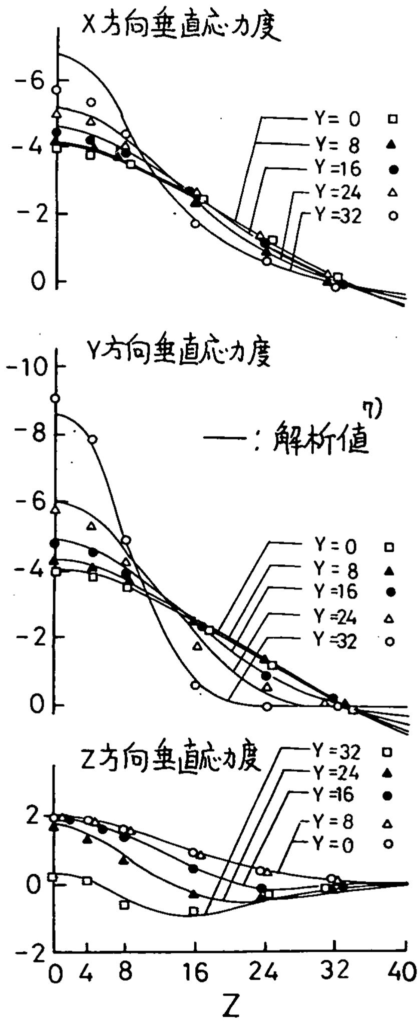


図6 例題1のYZ面の応力度の計算結果

他の応力度＝0、$U_x = a_1 \Sigma \varphi_2 W_Y / A_0$、$U_Y = a_1\{-\Sigma\varphi_1 + 4(1-\nu)\Sigma\varphi_2\} W_Y/A_0$、$U_Z = 0$。Z方向の重み荷重$W_Z$について、$\sigma_{XX} = \sigma_{YY} = \nu W_Z/(2A_0)$、$\sigma_{ZZ} = W_Z/(2A_0)$、他の応力度＝0、$U_X = U_Y = 0$、$U_Z = a_1(3-4\nu)\Sigma\varphi_3 W_Z/A_0$

4.2 計算例と精度

数値は無次元化して表す。図4は輪切状の部分の側面に圧力を受ける円柱である。これを図5の要素数194のモデルで計算した結果が図6である。図7は、上底面の中心に局部圧縮荷重を受ける円柱である。これを図8のように1/8の領域について要素数216のモデルで計算した結果が図9である。このようなせん断力の作用しない荷重条件の三次元問題は、初歩的な間接法プログラムであっても比較的精度の良い計算結果となり、誤差の大きさは最高10％程度である。ただし計算時間は二次元の場合に比べてはるかに長い。

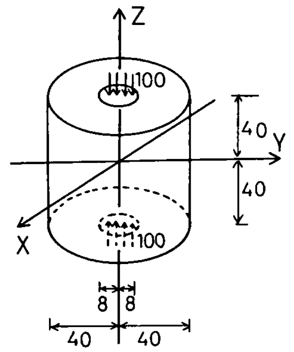
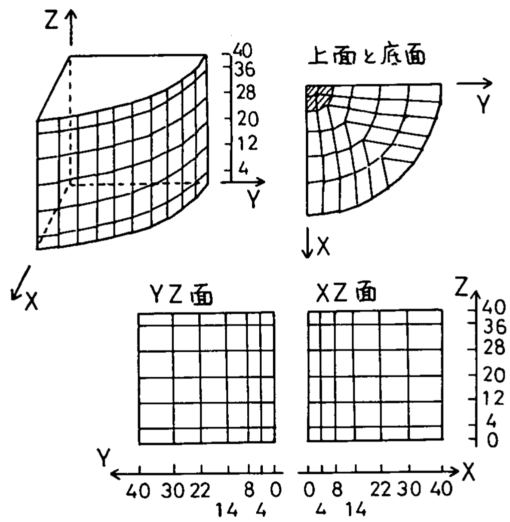


図7 例題2



要素数 216
CPU 115.6s
(FACOM-M200)
E=100, ν=0.25
境界条件：上面左上の4つの要素は要素に垂直な表面力100、XZ面YZ面XY面の要素に垂直な方向の変位0、他はすべて表面力0

図8 例題2のモデル

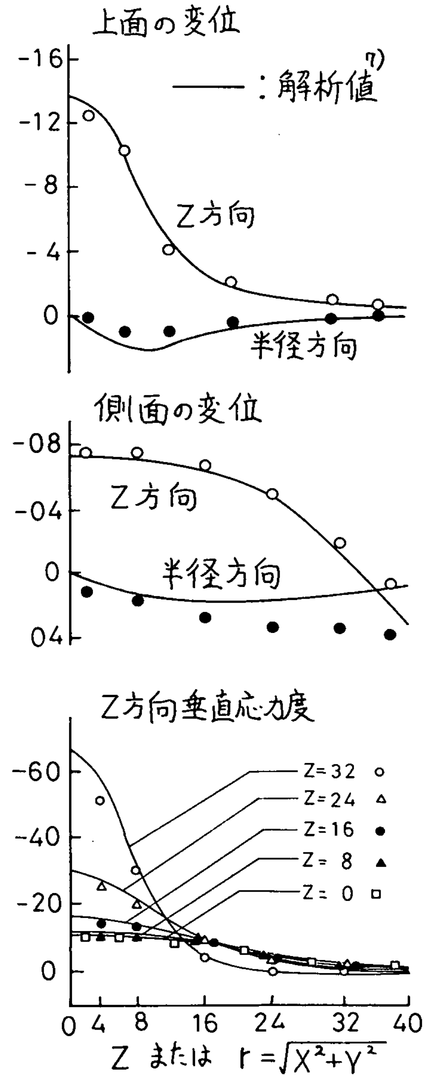


図9 例題2の計算結果

5 むすび

直接法は、係数および定数項に誤差を含んだ連立方程式を用いるので、精度上不利であり、また誤差を検定する方法がない。間接法は、二次元問題について、要素ごとに合計と1次モーメントが等価であるように境界条件を再現することにより精度のよい経済的な解が得られる。計算結果の数値上の精度を検定できることは、間接法の特徴である。また三次元の間接法の初歩的なプログラムで、せん断力の作用しないような荷重条件の問題を計算したところ、誤差の大きさが最高で10％程度である計算結果が得られた。

〔文献〕1) 平居孝之、境界要素法における境界積分と境界値分布関数、日本建築学会九州支部研究報告 第27号・1（構造系）1983　2) Ed by P.K.Banerjee and R.Butterfield, Developments in Boundary Element Methods-1, Appl. Sci. Pub., London, 1979　3) C.A.Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1978　4) C.Patterson, M.A.Sheich, Regular Boundary Integral Equations for Stress Analysis, pp85-104 in 'Boundary Element Methods' Springer Verlag, 1981　5) K.Kishitani, T.Hirai, K.Murakami, J-integral Calculations with Boundary Elements, pp481-493 in 'Boundary Elements' Springer Verlag, 1983　6) 平居孝之、三次元弾性問題を対象とした境界要素法における間接法と直接法について、日本建築学会論文報告集 第320号 1982　7) 斉藤秀雄、短円柱および円盤の軸対称変形、日本機械学会論文集、18, 68, 1952

（大分大学助教授　工博）