

コンクリートの衝撃試験のための波動方程式の数値計算に関する研究

正会員 永松 静也^{*1} 同 平居 孝文^{*2}
〇同 黒野 薫^{*3} 同 佐藤 嘉昭^{*4}

1. 序

一般に弾性体の衝撃問題は解析的な解を得ることが困難であり、支配方程式である微分方程式を何らかの方法で離散化し、数値解析することになる。本研究では二次元弾性体の応力波の伝播について数値計算する方法について考察する。

(4)式及び(5)式のような時間依存の方程式、つまり動的問題を有限要素法により解析するためには、時間に関して積分せねばならず、その手法の一つに直接積分法がある。これは解析に必要な時間間隔をある程度細かい刻みに分割し、初期状態からステップ・バイ・ステップに解いていくものである。本解析ではニューマークβ法を採用する。直接積分法では時間刻みに分割し、繰り返し計算するため、どうしても計算量が多くなる。しかし有限要素法により弾性体の応力波の伝播を解析するためには、時間刻みを極めて小さくし、さらに各ステップにおいて精度のよい解を得る必要がある。そこで本論では三角形6節点の高次要素を用い、さらに剛性マトリックスを求めるための要素内の積分は解析積分を行った有限要素法プログラムを開発し、弾性体の応力波の伝播の解析を行う。

2. 解析方法

平面応力問題として二次元波動方程式⁽²⁾の誘導を行う。但し物体力は無視するものとする。x方向・y方向の変位をu・vとし、時間をt、密度をγ、重力加速度をgとする。

弾性論に基づき、x方向の応力は次式で表される。

$$\left\{ \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right\} dy + \left\{ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right\} dx \quad (1)$$

ダランベールの原理より運動方程式は次式で表される。

$$-\frac{\gamma}{g} dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left\{ \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) \right\} dy + \left\{ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right\} dx = 0 \quad (2)$$

(2)式を整理すると次式のようにになる。

$$-\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

(3)式を応力-ひずみ関係式、変位-ひずみ関係式を用いてさらに変形すると、x方向の波動方程式は次式のようにになる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \quad (4)$$

同様にy方向の波動方程式は次式のようにになる。

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (5)$$

$$\left(\text{但し } \rho = \frac{\gamma}{g}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$$

なお、ここで(4)式(5)式を平面ひずみ問題の波動方程式に変換するには、弾性係数の置き替えを行えばよい。

(4)式(5)式の二次元波動方程式の有限要素法による表示式は次式のようにになる。

$$[M] \{\ddot{\phi}\} + [K] \{\phi\} = \{F\} \quad (6)$$

[M]は質量マトリックス、[K]は剛性マトリックス、{F}は外力ベクトル、{\ddot{\phi}}は節点加速度ベクトル、{\phi}は節点変位ベクトルである。(6)式を解くために、ここでは直接積分法の一つであるニューマークβ法を用いることにする。時間増分をΔt秒とすると、時刻(t+Δt)秒における節点の加速度・速度・変位を求めるための、ニューマークβ法による計算式は次式のようにになる。

$$\ddot{\phi}(t+\Delta t) = \left([M] + \beta(\Delta t)^2 [K] \right)^{-1} \{ F(t+\Delta t) - [K] \left(\phi(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \ddot{\phi}(t) \right) \} \quad (7)$$

$$\dot{\phi}(t+\Delta t) = \dot{\phi}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\phi}(t) + \ddot{\phi}(t+\Delta t)) \quad (8)$$

$$\phi(t+\Delta t) = \phi(t) + \Delta t \dot{\phi}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\phi}(t) + \beta(\Delta t)^2 \cdot (\ddot{\phi}(t+\Delta t) - \ddot{\phi}(t)) \quad (9)$$

解析は部材が静止した状態から開始するので、 $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = \ddot{\phi}(0) = 0$ である。さらに(7)式の右辺の外力荷重ベクトル $F(t+\Delta t)$ を境界条件として与えることができるならば、右辺はすべて既知量であるので、 $\ddot{\phi}(t+\Delta t)$ は計算できる。その結果を(8)式(9)式に代入すれば、速度・加速度を求めることができる。なお、 β は0から $1/2$ までとりうるが本解析では、無条件安定である $\beta = 1/4$ を用いた。

3 解析モデル

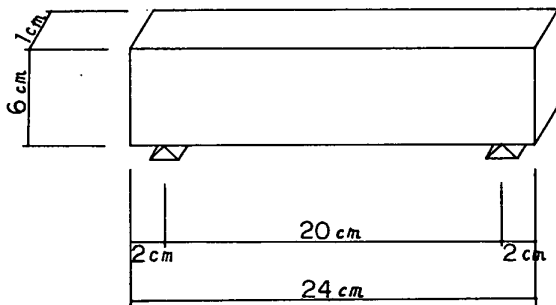


図-1 解析対象

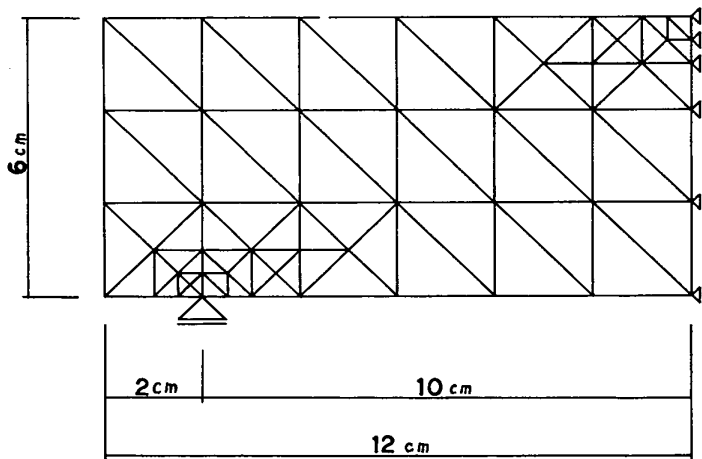


図-2 解析モデル

解析例として図1に示すコンクリート梁が中央点に衝撃荷重を受ける場合を解析する。梁せい6 cm、厚さ1 cm、支点間距離20 cmとする。解析対象の対称性により、モデル化は図2に示すように解析対象の $1/2$ について行い、中心断面は x 方向に関してのみ拘束した。境界条件として入力する外力荷重は、本実験において求められるものであるが、本研究においては、その実験データを得るに至っていないため、図3に示すように最大値が100 kgfのパルスと仮定した衝撃荷重を入力した。荷重は衝撃開始後 $T = 1.0 \times 10^{-4}$ 秒まで一定勾配で増加し、最大荷重に達した後は同じ勾配で減少し $T = 2.0 \times 10^{-4}$ 秒で荷重は0となる。この仮定した衝撃荷重により得られた解析結果により定量的な考察を試みることは問題はあろうが、開発したプログラムの有効性の判断と、弾性体の応力波の伝播に関する定性的な考察は可能であろう。

材料定数は以下のとおりである。

$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\gamma = 2.3 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$$

$$\nu = 0.17$$

また時間増分は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ 秒である。

4. 解析結果

図4は図示の解析モデルのA点の y 方向変位の時間変化を示したものである。衝撃荷重が終了した後も変位は徐々に増加しつづけ、 $T = 2.4 \times 10^{-4}$ 秒で最大変位に達する。この最大変位は約 9.73×10^{-3} cmである。

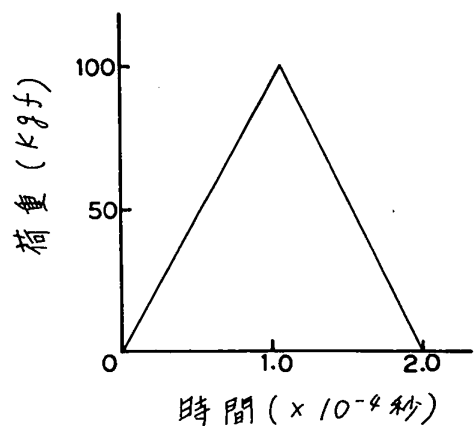


図-3 入力荷重

図2と同じモデルに静的に衝撃荷重の最大値に等しい100kgの荷重を加えて有限要素法により解析した場合のA点のたわみ変位は約 $9.62 \times 10^{-3} \text{cm}$ で、動的な場合のほうが極くわずかであるが大きい。変位は徐々に減少していき以後単振動を行う。

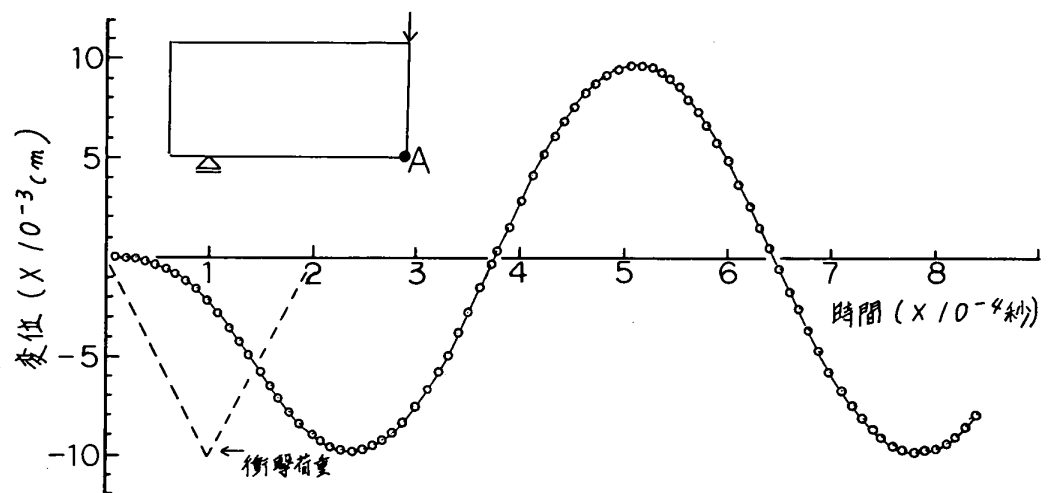


図-4 変位の時間的变化

図5はスパン方向に図示の異った3点A・B・Cをとり、各点のせん断応力の時間的变化を示したものである。衝撃初期においては、衝撃点より遠くなる点ほどせん断応力の値が小さくなっている。またせん断応力が最も大きくなる時刻は各点において時間的なずれが生じており、衝撃点に最も近いA点が最も早く最大値に達している。

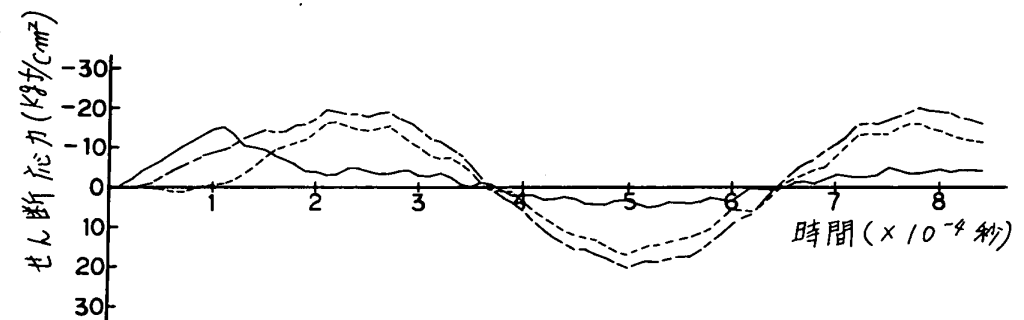
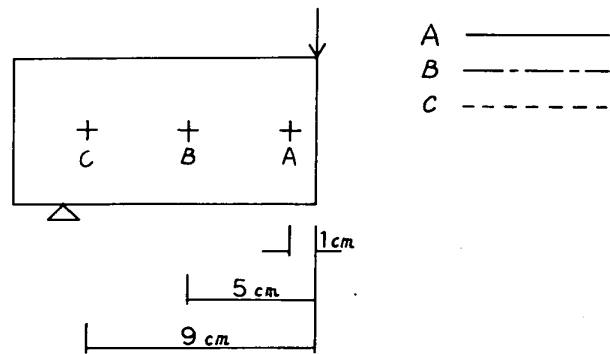


図-5 せん断応力の時間的变化

図6は図示のA・B・C各断面に発生する τ_{xy} の分布と σ_x の分布の時間的变化を示したものである。



A断面のせん断応力分布はB・C断面のせん断応力分布とは異った様相を示している。衝撃初期では、A断面のせん断応力分布は衝撃点近傍に大きな応力が発生しており、応力分布の増減は衝撃荷重の増減とほぼ一致している。

衝撃荷重が終了した後のせん断応力分布には衝撃初期にみられていた衝撃点近傍の応力のかたよりはみられず、なだらかな応力分布になっている。

A・B・C各断面のせん断応力分布は、図々でも示しているように時間的なずれが生じている。 0.5×10^{-4} 秒でA断面ではすでにかなり大きな応力が発生しているが、B断面では余り大きくない、C断面ではA・B断面とは逆方向の応力が極くわずか発生しているだけである。 2.0×10^{-4} 秒ではA断面の応力分布はすでに減少しているが、B・C断面では応力が増加している。このように本解析例では時間の経過とともに応力波が衝撃点から徐々に進行していく様子が表れている。

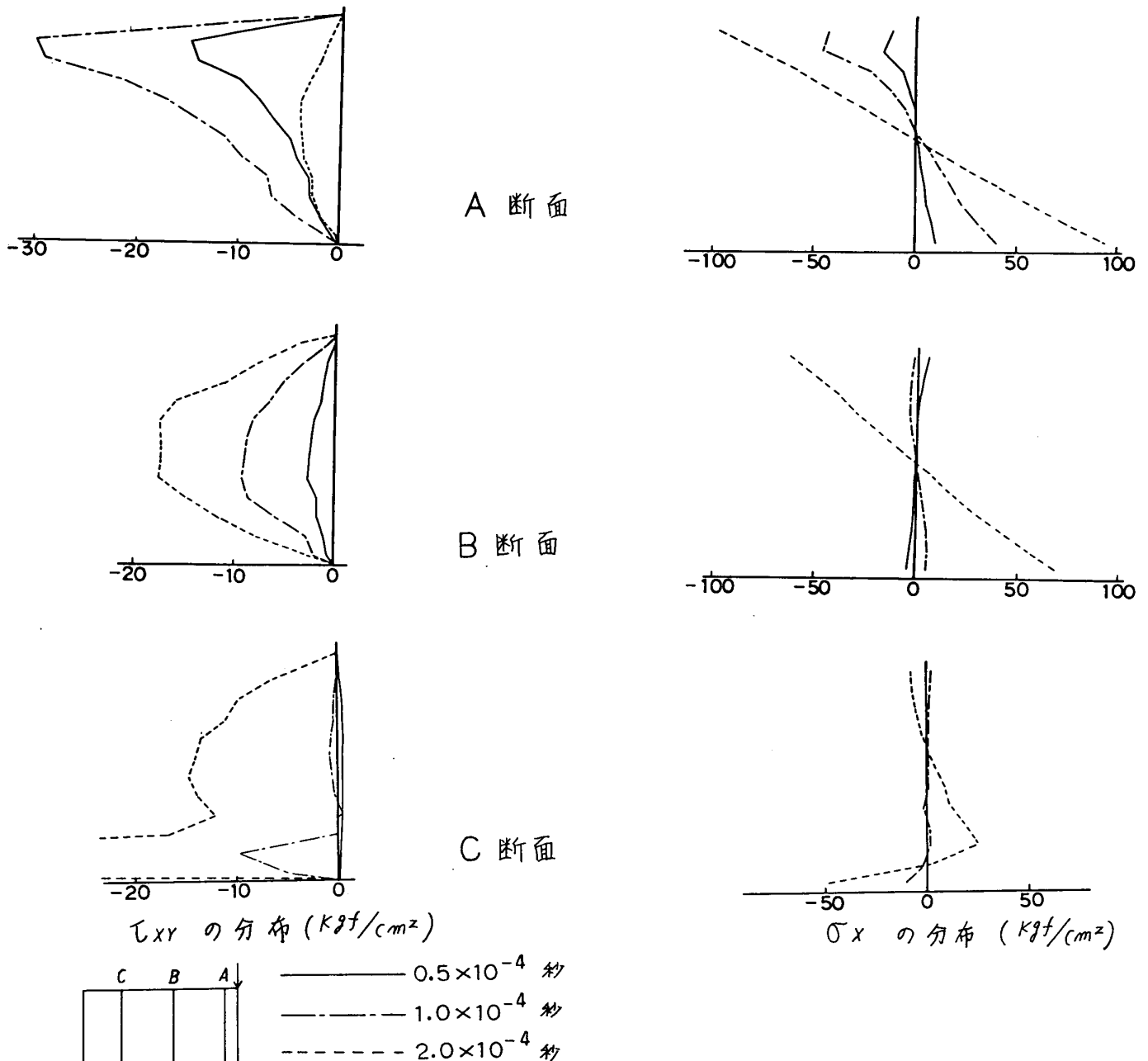


図-6 応力分布の時間的变化

5. まとめ

以上の結果より本研究に使用した解析モデルと衝撃荷重は仮想的なものであるが、開発したプログラムにより衝撃現象を把握できるといえる。本解析の範囲で衝撃挙動と静的挙動の異なる主な点をあげれば、衝撃荷重を受けた部材には、衝撃初期では衝撃点近傍にのみ応力が発生し、時間の経過とともに応力は支持点の方へ伝播することである。また衝撃の極く初期には支持点近傍にのみ、わずかではあるが逆方向の応力が発生していることである。今後の課題としては、実験データに基づけられた衝撃荷重を境界条件として入力できれば、衝撃現象の厳密な解析が可能と思われる。

《参考文献》

- (1) 戸川 算人 著 「有限要素法による振動解析」
- (2) 日本鋼構造協会編 「コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-4-A. 動的応答解析」

*1 大分大学教授 工博 *2 同助教授 工博 *3 同大学院生 *4 同助手