

境界要素法における境界積分と境界値分布関数

正会員 平居孝之

1 序

弾性問題の解析方法として境界要素法の利用が研究されている。境界要素法には、数値計算の過程が異なる直接法と間接法と呼ばれる二つの方法がある。直接法は境界積分方程式に基づき、未知の境界の変位と表面力を直接求める方法である。間接法は境界条件を満足させるのに必要な境界上に作用させる未知の分布関数を求めた後解を導く方法である。最近境界要素法という名称のもとに行われている研究は、直接法を対象としているものが多く、おかげでも三次元弾性問題について解法の有用性を示している報告が注目される。筆者は、境界要素法が弾性問題の解析方法として有効であるという考えをいっている者の一人であり、二次元弾性問題の直接法と間接法による境界要素解について検討し、直接法は境界値の分布状態を低次の関数で表して解を求めると精度が悪いことを報告している¹⁾。直接法の場合、境界値の分布状態を表す関数の次数は数値計算における効率の問題とする立場と、線形の分布関数を用いると精度が悪く2次または3次の分布関数を適用すると精度の良い解が導けるとする立場がある。いずれの立場を取るべきかは興味あるテーマである。境界要素解に含まれる誤差は、境界値の分布状態を表す関数に起因するもののほか境界積分を計算するときの数値積分に起因するものがあり、これまでの研究例では両方の誤差を含んだ数値解について検討が加えられているため、前述の二つの立場についていずれを受け入れて良いか明確な判断を下し難い。そこで本報告では、境界積分を解析的に導き、数値計算による誤差を除いた場合について、二次元弾性問題の数値計算を試み考察する。

2 離散化された基礎方程式における境界積分の解析値

等方性線形の静弾性問題で物体力の無い場合の直接法の基礎方程式を境界要素で離散化して表すと次のようになる。

$$\text{未知の境界値を求めると} \quad \int u^* T ds - \int T^* u ds = - \int u^* I ds + \int T^* u ds \quad (1)$$

$$\text{内点の変位を求めると} \quad u = \int u^* I ds - \int T^* u ds \quad (2)$$

$$\text{内点の応力を求めると} \quad \sigma = \int (u^*) I ds - \int (T^*) u ds \quad (3)$$

ここで u は変位、 T は表面力、 σ は応力、アンダーラインは境界条件または(1)式の解で与えられる既知の境界値を表す。 $*$ は計算上利用された既知の解即ち基本解を表す。 (u^*) と (T^*) は、基本解の偏微分値に弾性係数を付けたものを表す。積分 $\int ds$ は1つの境界要素上における積分であり Σ は各要素上で積分した値の代数和である。

ここでは線形の境界要素で、表1に示す変位が2次に分布し表面力が線形に分布する2次要素について、境界積分の解析値を導く。変位が線形に分布し表面力が等分布する線形要素の解析値はすでに報告している¹⁾。

図1と図2の記号のほか次の記号を用いる。

$$m = \frac{3+\nu}{4\nu}, \quad n = \frac{1-\nu}{4\nu}, \quad A = \frac{(\nu-3)(\nu+1)}{4\nu E}, \quad B = \frac{(\nu+1)^2}{4\nu E}, \quad E: \text{弾性係数}$$

$$\nu \text{ ポアソン比}, \quad AA = \ln \left| \frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_a} \right|, \quad EE = \cot \theta_e \cdot \ln \left| \frac{\sin \theta_e}{y_0} \right| - \cot \theta_a \cdot \ln \left| \frac{\sin \theta_a}{y_0} \right|, \quad HH = \frac{1}{\sin^2 \theta_e} - \frac{1}{\sin^2 \theta_a}$$

$$GG = \frac{1}{\sin^2 \theta_e} \ln \left| \frac{\sin \theta_e}{y_0} \right| - \frac{1}{\sin^2 \theta_a} \ln \left| \frac{\sin \theta_a}{y_0} \right|, \quad CC = \cos 2\theta_e - \cos 2\theta_a, \quad SS = \sin 2\theta_e - \sin 2\theta_a, \quad FF = \theta_e - \theta_a$$

$$TT = \cot \theta_e - \cot \theta_a, \quad CQ = \cos 4\theta_e - \cos 4\theta_a, \quad SQ = \sin 4\theta_e - \sin 4\theta_a, \quad h_{11} = -FF, \quad h_{21} = -AA, \quad h_{31} = -\frac{1}{2}FF + \frac{1}{4}SS, \quad h_{41} = \frac{1}{4}CC$$

$$g_{11} = -(EE + TT + FF) \cdot y_0, \quad g_{12} = -g_{11} x_0 - (\frac{1}{2}GG + \frac{1}{4}HH) y_0^2$$

$$g_{21} = -FF y_0, \quad g_{22} = -g_{21} x_0 - AA y_0^2$$

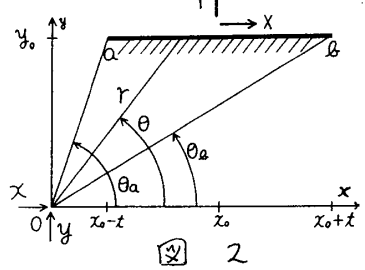
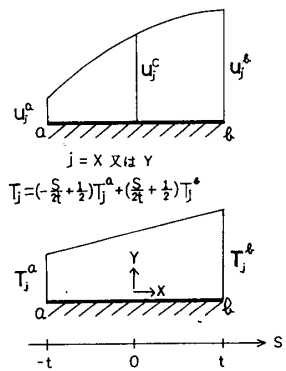
$$g_{31} = -AA \cdot y_0, \quad g_{32} = -g_{31} x_0 + (TT + FF) \cdot y_0^2$$

$$g_{41} = TT \cdot y_0, \quad g_{42} = -g_{41} x_0 + \frac{1}{2}HH \cdot y_0^2$$

表1 境界要素

境界要素	自由度	境界値の分布状態を表す関数
線形要素	2	変位: 線形 表面力: 一定
2次要素	4	変位: 2次 表面力: 線形

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= -h_{11}x_0 - AAy_0 & h_{13} &= -h_{11}x_0^2 - 2h_{12}x_0 + (TT+FF)y_0^2 & \mathcal{G}_{111} &= AA & u_j &= (\frac{S^2}{2t^2} - \frac{S}{2t})u_j^a + (-\frac{S^2}{t^2} + 1)u_j^c + (\frac{S^2}{2t^2} + \frac{S}{2t})u_j^b \\
 h_{22} &= -h_{21}x_0 + (TT+FF)y_0 & h_{23} &= -h_{21}x_0^2 - 2h_{22}x_0 + (\frac{1}{2}HH+AA)y_0^2 & \mathcal{G}_{211} &= \frac{1}{2}CC & \\
 h_{32} &= -h_{31}x_0 + \frac{1}{4}CC \cdot y_0 & h_{33} &= -h_{31}x_0^2 - 2h_{32}x_0 - (\frac{1}{4}SS + \frac{1}{2}FF)y_0^2 & \mathcal{G}_{311} &= -\frac{1}{2}SS & \\
 h_{42} &= -h_{41}x_0 - (\frac{1}{4}SS + \frac{1}{2}FF)y_0 & h_{43} &= -h_{41}x_0^2 - 2h_{42}x_0 - (AA + \frac{1}{4}CC)y_0^2 & & & \\
 \mathcal{G}_{112} &= -\mathcal{G}_{111}x_0 - (TT+FF)y_0 & \mathcal{G}_{121} &= FF & \mathcal{G}_{122} &= -\mathcal{G}_{121}x_0 + AAy_0 & \\
 \mathcal{G}_{212} &= -\mathcal{G}_{211}x_0 - (\frac{1}{2}SS + FF)y_0 & \mathcal{G}_{221} &= FF + \frac{1}{2}SS & \mathcal{G}_{222} &= -\mathcal{G}_{221}x_0 + (2AA + \frac{1}{2}CC)y_0 & \\
 \mathcal{G}_{312} &= -\mathcal{G}_{311}x_0 - (AA + \frac{1}{2}CC)y_0 & \mathcal{G}_{321} &= AA + \frac{1}{2}CC & \mathcal{G}_{322} &= -\mathcal{G}_{321}x_0 - (2FF + TT + \frac{1}{2}SS)y_0 & \\
 P_{111} &= \frac{1}{2}CC/y_0 & P_{112} &= -P_{111}x_0 - FF - \frac{1}{2}SS & P_{122} &= -P_{121}x_0 + AA + \frac{1}{2}CC & \\
 P_{211} &= -\frac{1}{2}SS/y_0 & P_{212} &= -P_{211}x_0 - AA - \frac{1}{2}CC & P_{222} &= -P_{221}x_0 - FF - \frac{1}{2}SS & \\
 P_{311} &= (\frac{1}{2}CC - \frac{1}{8}C\theta)/y_0 & P_{312} &= -P_{311}x_0 - \frac{1}{2}FF + \frac{1}{8}S\theta & P_{322} &= -P_{321}x_0 - \frac{1}{4}CC - \frac{1}{8}C & \\
 P_{411} &= (-\frac{1}{4}SS + \frac{1}{8}S)/y_0 & P_{412} &= -P_{411}x_0 + \frac{1}{4}CC + \frac{1}{8}C & P_{422} &= -P_{421}x_0 + \frac{1}{2}FF + \frac{1}{2}SS + \frac{1}{8}S\theta & \\
 P_{113} &= -P_{111}x_0^2 - 2P_{112}x_0 - (2AA + \frac{1}{2}CC)y_0 & P_{123} &= -P_{121}x_0^2 - 2P_{122}x_0 - (2FF + TT + \frac{1}{2}SS)y_0 & & & \\
 P_{213} &= -P_{211}x_0^2 - 2P_{212}x_0 + (2FF + TT + \frac{1}{2}SS)y_0 & P_{223} &= -P_{221}x_0^2 - 2P_{222}x_0 - (2AA + \frac{1}{2}CC)y_0 & & & \\
 P_{313} &= -P_{311}x_0^2 - 2P_{312}x_0 + (\frac{1}{2}CC + \frac{1}{8}C\theta)y_0 & P_{323} &= -P_{321}x_0^2 - 2P_{322}x_0 + (FF + \frac{1}{4}SS + \frac{1}{8}S\theta)y_0 & & & \\
 P_{413} &= -P_{411}x_0^2 - 2P_{412}x_0 - (FF + \frac{3}{4}SS + \frac{1}{8}S\theta)y_0 & P_{423} &= -P_{421}x_0^2 - 2P_{422}x_0 + (2AA + CC + \frac{1}{8}C\theta)y_0 & & & \\
 P_{121} &= \frac{1}{2}SS/y_0, P_{221} = \frac{1}{2}CC/y_0, P_{321} = (\frac{1}{4}SS - \frac{1}{8}S\theta)/y_0, P_{421} = -\frac{1}{8}C\theta/y_0 & & & & &
 \end{aligned}$$



境界要素上の表面力と変位を図1のように次式で表す。

表面力: $T_j = (-\frac{S}{2t} + \frac{1}{2})T_j^a + (\frac{S}{2t} + \frac{1}{2})T_j^b$ 変位: $u_j = (\frac{S^2}{2t^2} - \frac{S}{2t})u_j^a + (-\frac{S^2}{t^2} + 1)u_j^c + (\frac{S^2}{2t^2} + \frac{S}{2t})u_j^b$

jは境界値の方向であり、図2のように各要素ごとに要素に平行な方向をX、垂直な方向をYで表す。基礎式(1)に用いる基本解は、既知のものであれば任意のものを選ぶが、(2)と(3)式へ適用出来ることから、単位の集中荷重が領域の1点で面内に作用した場合を用いる。図2のように基本解の荷重の作用点を原点とし、境界要素と平行な座標軸x,yを考え、またrとθで極座標を表す。図2の斜線は境界要素に対し実体のある部分を示しており、要素の端部をaとbで示す。x方向の単位荷重が作用する場合の基本解は次式である。厚さは1としている。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^* &= \{-m + (m-n)\sin^2\theta\} \cos\theta/r & \sigma_y^* &= \{n - (m-n)\sin^2\theta\} \cos\theta/r & T_{xy}^* &= \{m - (m-n)\sin^2\theta\} \cos\theta/r \\
 u_x^* &= A \ln r + B \cos^2\theta & u_y^* &= B \sin\theta \cos\theta & T_{zy} & \text{は1Lを正とする。}
 \end{aligned}$$

未知の境界値を求める(1)式における境界要素上の解析積分値は、次のGとHになる。iはxまたはy、jはxまたはyをとる。

$$\int u^* \cdot T ds = G_{ij}^a \cdot T_j^a + G_{ij}^b \cdot T_j^b, \quad \int T \cdot u ds = H_{ij}^a \cdot U_j^a + H_{ij}^c \cdot U_j^c + H_{ij}^b \cdot U_j^b$$

$$\begin{aligned}
 G_{xx}^a, G_{xx}^b &= -\frac{K}{2t^2}(A \cdot g_{12} + B \cdot g_{42} - B \cdot g_{22}) + \frac{1}{2}(A \cdot g_{11} + B \cdot g_{41} - B \cdot g_{21}) & H_{xy}^a, H_{xy}^c &= \frac{1}{2t^2} \{nh_{23} - (m-n)h_{43}\} - \frac{K}{2t} \{nh_{22} - (m-n)h_{42}\} \\
 G_{xy}^a, G_{xy}^c, G_{yx}^a, G_{yx}^c &= -\frac{K}{2t} B \cdot g_{32} + \frac{1}{2} B \cdot g_{31} & H_{xy}^b &= -\frac{1}{2t} \{nh_{23} - (m-n)h_{43}\} + nh_{21} - (m-n)h_{41} \\
 G_{yy}^a, G_{yy}^b &= -\frac{K}{2t^2}(A \cdot g_{12} + B \cdot g_{22}) + \frac{1}{2}(A \cdot g_{11} + B \cdot g_{21}) & H_{yx}^a, H_{yx}^c &= \frac{1}{2t^2} \{-nh_{23} - (m-n)h_{43}\} - \frac{K}{2t} \{-nh_{22} - (m-n)h_{42}\} \\
 H_{xx}^a, H_{xx}^c &= \frac{1}{2t^2} \{-mh_{13} + (m-n)h_{33}\} - \frac{K}{2t} \{-mh_{12} + (m-n)h_{32}\} & H_{yx}^b &= -\frac{1}{2t} \{-nh_{23} - (m-n)h_{43}\} - nh_{21} - (m-n)h_{41} \\
 H_{xx}^c &= -\frac{1}{2t^2} \{-mh_{13} + (m-n)h_{33}\} - mh_{11} + (m-n)h_{31} & H_{yy}^a, H_{yy}^c &= \frac{1}{2t^2} \{-nh_{13} - (m-n)h_{33}\} - \frac{K}{2t} \{-nh_{12} - (m-n)h_{32}\} \\
 & & H_{yy}^b &= -\frac{1}{2t} \{-nh_{13} - (m-n)h_{33}\} - nh_{11} - (m-n)h_{31}
 \end{aligned}$$

以上において、aのときk=1、bのときk=-1とする。y_0=0のときはy_0 → -0の極限をとる。

内点の変位を求める(2)式の解析積分値は、y_0 ≠ 0のとき上述のGとHと同じであり、y_0=0のときはそれらの式でy_0 → +0の極限を取る。

内点の応力を求める(3)式の解析積分値は、次式のQとPになる。σ_xはσ_xの式で、yの位置を入れ換える。jはXとYであり、iはTに対しaとb、uに対しaとbとCをとり、それぞれ総和規約に従う。T_{xy}は右回りの回転を与えるものを正とする。

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left\{ Q(j, \frac{\partial}{\partial x}, x, l) + \nu \cdot Q(j, \frac{\partial}{\partial y}, y, l) \right\} \cdot T_j^l - \left\{ P(j, \frac{\partial}{\partial x}, x, l) + \nu \cdot P(j, \frac{\partial}{\partial y}, y, l) \right\} \cdot U_j^l \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{-E}{2(1+\nu)} \left[\left\{ Q(j, \frac{\partial}{\partial y}, x, l) + Q(j, \frac{\partial}{\partial x}, y, l) \right\} \cdot T_j^l - \left\{ P(j, \frac{\partial}{\partial y}, x, l) + P(j, \frac{\partial}{\partial x}, y, l) \right\} \cdot U_j^l \right]$$

$$Q(x, y, x, a), Q(x, y, x, b) = \frac{-k}{2t} \{ A \cdot \delta_{1, y_2} - B \delta_{2, y_2} \} + \frac{1}{2} \{ A \cdot \delta_{1, y_1} - B \delta_{2, y_1} \}$$

$$P(x, y, x, a), P(x, y, x, b) = \frac{1}{2t} \{ n P_{2, y_2} - (m-n) P_{1, y_2} \} - \frac{k}{2t} \{ n P_{2, y_2} - (m-n) P_{1, y_2} \}$$

$$Q(y, y, x, a), Q(y, y, x, b) = \frac{-k}{2t} B \cdot \delta_{2, y_2} + \frac{1}{2} B \cdot \delta_{2, y_1}$$

$$P(y, y, x, a), P(y, y, x, b) = \frac{1}{2t} \{ n P_{2, y_2} - (m-n) P_{1, y_2} \} + n P_{2, y_1} - (m-n) P_{1, y_1}$$

$$Q(x, y, y, a), Q(x, y, y, b) = \frac{-k}{2t} \{ A \cdot \delta_{1, y_2} + B \delta_{2, y_2} \} + \frac{1}{2} \{ A \delta_{1, y_1} + B \delta_{2, y_1} \}$$

$$P(x, y, y, a), P(x, y, y, b) = \frac{1}{2t} \{ -n P_{2, y_2} - (m-n) P_{1, y_2} \} - \frac{k}{2t} \{ -n P_{2, y_2} - (m-n) P_{1, y_2} \}$$

$$P(x, y, x, a), P(x, y, x, b) = \frac{1}{2t} \{ -m P_{1, y_2} + (m-n) P_{2, y_2} \} - \frac{k}{2t} \{ -m P_{1, y_2} + (m-n) P_{2, y_2} \}$$

$$P(x, y, y, a), P(x, y, y, b) = \frac{1}{2t} \{ -n P_{1, y_2} - (m-n) P_{2, y_2} \} - \frac{k}{2t} \{ -n P_{1, y_2} - (m-n) P_{2, y_2} \}$$

$$P(x, y, x, c) = -\frac{1}{2t} \{ -m P_{1, y_2} + (m-n) P_{2, y_2} \} - m P_{1, y_1} + (m-n) P_{2, y_1}$$

$$P(y, y, y, c) = \frac{1}{2t} \{ -n P_{1, y_2} - (m-n) P_{2, y_2} \} - n P_{1, y_1} - (m-n) P_{2, y_1}$$

以上において、 a のとき $k=1$ 、 b のとき $k=-1$ とする。また ν は、左辺で $\frac{\partial}{\partial x}$ あるいは $\frac{\partial}{\partial y}$ を表し、右辺では $\frac{\partial}{\partial x}$ のとき 1、 $\frac{\partial}{\partial y}$ のとき 2 を表す。平面応力状態で導いており、平面歪状態とするには弾性係数を置き換える。

3 数値計算と考察

表 2 例題 (数値計算では、 $x, y, U: \text{cm}$, $\sigma: \text{kgf/cm}^2$, $\nu=0.2, E=100 \text{ kgf/cm}^2$, 厚さ 1 cm)

表 2 の例題を取り上げる。

3-1 数値積分と解析積分
表 2 は表 2 の 2 次分布の問題を数値積分で計算した場合と解析積分で計算した場合の精度を比較したものである。数値積分の誤差は解析精度に大きく影響しており、経済的な解を得るには境界積分を解析的に計算することが必要性の高い条件と考えられる。

3-2 境界値の分布関数の誤差
図 3 は、境界値の分布状態を表す関数の次数によって、境界値に含まれる誤差を変わったもので、斜線の評価が誤差になる。分布関数の次数が高くなる程、誤差は小さい。図 4 は表 2 の 4 次分布の問題について、表 1 の線形要素と 2 次要素を用いて計算した結果を、境界 BE 上の変位について示したものである。この図 4 に示される値は、直接法の基礎式(1)における未知数であり、解の精度はこれらの値から判断される。線形要素では誤差がきわめて大きい。2 次要素では要素の数を十分多くすると、良い精度が得られている。分布関数の次数に起因する誤差についてさらに調べたのが表 4 である。

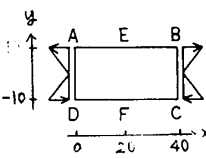
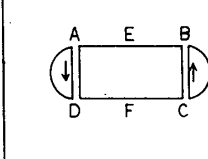
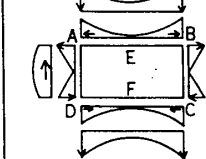
2 次分布の問題	3 次分布の問題	4 次分布の問題
 $\sigma_x = \frac{10}{y}$ $\sigma_y = 0$ $\tau_{xy} = 0$ $U_x = \frac{1}{2} \left(\frac{23}{10} - 2y \right)$ $U_y = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{x^2+y^2}{20} + 2x - 19 \right\}$	 $\sigma_x = \frac{30}{20} x y$ $\sigma_y = 0$ $\tau_{xy} = \frac{30}{40} y^2 - \frac{15}{2}$ $U_x = \frac{1}{40E} \{ 3x^2 y - (2+\nu)y^3 + (300r-744)y + 21280 + 2000r \}$ $U_y = \frac{1}{40E} \{ -3r x y^2 - x^3 + (300r+1344)x - 10240 \}$	 $\sigma_x = \frac{30}{500} (x-20)^2 y$ $\sigma_y = \frac{1}{500} \{ -6(x-20)^2 y + y^3 - 300y \}$ $\tau_{xy} = \frac{x-20}{500} \{ -2(x-20)^2 + 3y^2 - 300 \}$ $U_x = \frac{(x-20)y}{500E} \{ (1+\nu)(x-20)^2 - r(y^2-300) \}$ $U_y = \frac{1}{500E} \{ -\frac{3}{2}(r+2)(x-20)^2 + \frac{1}{2}y^3 - 150y^2 + \frac{3+2\nu}{4}(x-20)^3 + 150(2+\nu)(x-20)^2 + 12500 \}$

表 3 数値積分と解析積分の比較

		数値積分			解析積分
		8点積分	16点積分	32点積分	
12要素モデル	解析結果誤差(%)	19.2	4.8	1.6	0.0
	計算時間(秒)	7.5	14.2	27.8	1.1
30要素モデル	解析結果誤差(%)	5.8	1.6	0.4	0.1
	計算時間(秒)	21.1	38.6	74.5	3.0

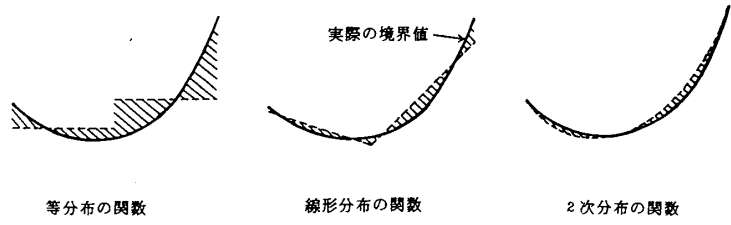


図 3 境界値の分布関数の誤差

に調べたのが表 4 である。基礎式(1)から構成された連立方程式の係数マトリックスを A 、連立方程式を解いて求めた未知数の計算結果を x 、未知数の理論値を x_0 と表す。係数マトリックスは、図 3 に示した境界値の分布関数の誤差に起因して誤差を含んでいるため、 Ax と Ax_0 に差が生じる。この差の大きさを最大値ノルムで表し、分布関数の誤差のパラメータとしている。表 4 のように線形要素では分布関数の誤差が大きく解析精度を良くす

表 5 内点の応力と変位の解析結果

内点の座標	x cm	y cm	T _{xy} kg/cm ²			U _x cm		
			線形要素	2次要素	理論値	線形要素	2次要素	理論値
	30.0	32.5	35.0	38.0	39.0	39.5	39.75	39.75
	0.0	2.5	5.0	8.0	9.0	9.5	9.75	9.75
	-10.15	-15.04	-20.34	-24.63	-31.14	-31.64	-32.66	-32.66
	-10.01	-14.85	-20.24	-24.89	-29.56	-30.69	-31.16	-31.16
	-10.00	-14.85	-20.25	-24.86	-29.61	-30.85	-31.46	-31.46
	-10.00	-14.84	-20.25	-24.85	-29.60	-30.80	-31.40	-31.40
	0.027	0.187	0.551	1.050	1.789	1.946	2.019	2.019
	0.002	0.174	0.555	1.081	1.874	2.107	2.226	2.226
	0.001	0.172	0.551	1.077	1.872	2.124	2.267	2.267
	0.000	0.173	0.555	1.082	1.878	2.128	2.261	2.261

(4次分布の問題。全表面力と内点の変位を入力)

4 結論

数値積分に含まれる誤差が解析精度に大きく影響するため、経済的な解を求めるためには境界積分を解析的に行うことが必要性の高い条件である。変位線形表面力一定の要素を用いると解析精度は悪いが、変位2次表面力線形の要素を用いると、満足出来る精度の解が得られる。

[文献] 1) 平居孝之, 二次元弾性問題を対象とした境界要素法における間接法と直接法について. 日本建築学会論文報告集, 第320号, 昭57年10月, 2) 小林昭一, 西村直志, 積分方程式法の解析精度の向上に関する考察, 工本学会論文報告集, 第291号, 昭54年11月, 3) J. L. Lachat, J. O. Wilson, Effective Nomerical Treatment of Boundary Integral Equations, a formulation for three-dimensional elastostatics, Intl. Jour. Num. Meth. Eng. 12, 1978

大分大学 助教授 (工博)

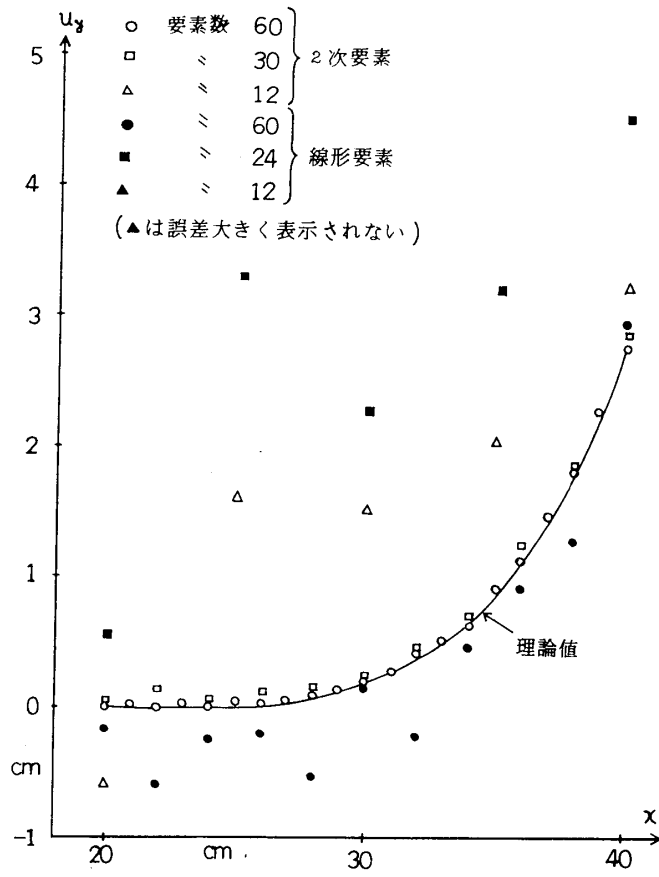


図 4 4次分布の問題の境界変位の計算結果

表 4 境界値の分布関数の誤差と解析結果

	要素数	分布関数の誤差のパラメータ		解析結果の誤差		
		$\ Ax - Ax_0\ \times 10^{-4}$ kgf/cm	$\ Ax_0\ \times 10^{-4}$ kgf/cm	$\frac{\ Ax - Ax_0\ }{\ Ax_0\ } \%$	$\frac{\ x - x_0\ }{\ x_0\ } \%$	
線形要素を用いた場合	3次分布の問題	12	4064	17530	23.19	44.93
		24	962	19826	4.85	13.08
		60	133	19114	0.69	6.02
	4次分布の問題	12	4874	16710	29.20	334.27
		24	1439	23529	6.12	94.93
		60	288	25530	1.13	11.42
2次要素を用いた場合	3次分布の問題	12	212	19522	1.08	8.69
		30	22	19007	0.12	0.18
		60	2	19181	0.01	0.19
	4次分布の問題	12	570	24688	2.31	41.82
		30	38	25728	0.15	2.74
		60	5	25867	0.02	1.91