【研究論文】
UDC：624.04：539.3

日本建築学会論文報告集
第320号・昭和57年10月

二次元弾性問題を対象とした境界要素法における間接法と直接法について

正会員 平 居 孝 之*

1. 序

弾性問題の解析方法として，境界法の利用が研究されている。積分方程式法，周辺積分有限要素法，重ね合せ法，体積力法などと呼ばれているが[1)~6)]，境界要素法という名称に統一されつつある[7)]。境界要素法は，工学で問題になる物理量の解析を，経済的かつ制御された誤差において行える可能性があり，その有用性を示唆する研究が多数発表されている[3),5),8)~15)]。また最近では，境界要素法の成書が出版されている[7),16),17)]。

境界要素法には，大きく分けて直接法と間接法と呼ばれる２つの方法がある。筆者は，二次元線形弾性問題の境界要素法による近似解法の開発を試みており，間接法については，有用性のある解析プログラムが得られることをすでに報告している[15)]。直接法は，最近研究が活発になってきており，一定要素を用いた解析プログラムが示されているが，境界の近傍で必然的な誤差を生じるなど精度上の問題がある[16),22)]。自然（第２種）境界値問題では，基本解を選択することにより解の精度を向上させる方法が示されているが[22)]，任意の境界条件の問題に適用するにはさらに検討を要する。線形要素についてはその数値的取り扱いが示されているが[16),22)]，基礎式を要素上で離散化するために行う積分計算は数値積分されており，これを解析的に導くことにより解の精度を向上し計算時間を短縮出来る余地を残している。また種々の形状と境界条件の問題について，解の精度を十分検討する必要がある。

本報では，直接法と間接法を比較する目的で，線形要素を用いたときの直接法の解析プログラムを作成し，すでに得られている間接法の解析プログラムと共に，いくつかの問題に適用して，解の精度を中心に検討した。なお基本解の境界要素上での積分は，従来数値積分によって計算されているが，これを解析値として導いている。

2. 既往の研究とその考察

2-1 直接法と間接法

直接法は，積分方程式法[1),22)]，境界積分方程式法[2)~4)]，周辺積分有限要素法[5)]などと呼ばれているもので，境界の変位と表面力の間に成り立つ積分方程式から，初期条件で与えられていない境界の変位と表面力を直接求める方法である。境界の変位と表面力の間に成り立つ関係を定式化するために，支配方程式を満足する基本解を利用するのが特徴である。領域の応力と変位は基本解およびその偏微分値と既知となった境界値から計算される。

間接法は，重ね合せ法[6),15)]，体積力法[8),23)]などと呼ばれる方法と同じであり，未定係数を付けた基本解を重ね合せた時の境界値が，問題の境界条件を再現しているように未定係数を求める方法である。未定係数は，基本解にかける重み荷重に相当する。間接法は，基本解として部分的に境界条件を満足している解を適用することが出来るので，境界近傍の解の精度を比較的低次の要素を用いて向上出来る可能性を持つが，問題を置き換えたモデルの厳密解を求めようとしているのではないことに配慮が要る。

境界要素法は，境界を有限個の要素に分割し，基礎式を各要素において離散化した多元連立一次方程式を解いて未知数を求める。要素における離散化は，選定した数点かまたは要素全域で行われる。数点を選定する場合は選点法[23)]ともいわれる。一般に未知数は要素の数に境界条件の自由度をかけた数だけ必要になり，境界上に分布する。境界法に対し領域法の有限要素法や差分法は，分割された小領域の各々で支配方程式を近似的に満足するように，試行関数に付けた未定係数を求めて解を導く方法である。この場合は未知数が領域全体に分布する。未知数の数が多いもの程，解の精度は上るが，同時に解析コストも上る。未知数の分布次元が領域法より１つ低い境界法は，経済的な解法となり得る可能性を有する。

2-2 基礎関係式

直接法の基礎式は種々の方法で導かれており，最近では境界要素法の代表的な研究者である C.A. Brebbia が仮想仕事の原理を出発点として，重みつき残差法で定式化している[19)]。また体積力法と同じ概念から生まれたとする考えもある[23)]。筆者は，以下に示すように重ね合せの原理に基づき，ガウスの定理[18)]から領域内の積分を境界上の積分に変換して導くのが理解しやすいと考える。

静的平衡状態にある等方性二次元線形弾性問題におい

* 大分大学 助教授・工博
（昭和56年10月13日原稿受理日，討論期限昭和58年1月末日）

て，変位を u_i ひずみを e_{ij} 応力を σ_{ij} 表面力を $\overset{\eta}{T}_i$ 物体力を F_i とする。i と j は座標軸を示し総和規約に従うものとする。η は境界の外向き法線ベクトルを表す。問題の境界条件で与えられた変位を $\underline{u_i}$ 表面力を $\underline{\overset{\eta}{T}_i}$ とし，変位が与えられている基本境界を S_u 表面力が与えられている自然境界を S_a で表す。問題と同じ形状のものに荷重が作用して静的平衡状態にあるものから，既知のものを基本解として考える。基本解における変位を u_i※ ひずみを e_{ij}※ 応力を σ_{ij}※ 表面力を $\overset{\eta}{T}_i$※ 領域の内部に作用する荷重を P_i※ で表す。問題の静的平衡状態に基本解を重ね合せると，新たな静的平衡状態が得られる。両者の間のひずみエネルギーの増分は，領域全体を V として，

$$\int_V e_{ij}^{※}\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{※}\right)dV$$

である。

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad \sigma_{ij}\eta_j=\overset{\eta}{T}_i,\ \text{および}$$

ガウスの定理[18]を用いて変形する。

$$\int_V e_{ij}^{※}\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{※}\right)dV$$
$$=\int_V \frac{1}{2}(u_{i,j}^{※}+u_{j,i}^{※})\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{※}\right)dV$$

部分積分して

$$=\int_{S_a+S_u} u_i^{※}\eta_j\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{※}\right)dS$$
$$-\int_V u_i^{※}\left(\sigma_{ij,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij,j}^{※}\right)dV$$

平衡条件より $\sigma_{ij,j}=-F_i$, $\sigma_{ij,j}^{※}=-P_i^{※}$ であるから

$$=\int_{S_a+S_u} u_i^{※}\left(\overset{\eta}{T}_i+\frac{1}{2}\overset{\eta}{T}_i^{※}\right)dS$$
$$+\int_V u_i^{※}\left(F_i+\frac{1}{2}P_i^{※}\right)dV$$

これは，ひずみエネルギーの増分が表面力，物体力および荷重のなす仕事に等しいことを表している。等号の成立下において既知の値の項を消去して整理すると

$$\int_V e_{ij}^{※}\sigma_{ij}dV=\int_{S_a} u_i^{※}\underline{\overset{\eta}{T}_i}dS$$
$$+\int_{S_u} u_i^{※}\overset{\eta}{T}_i dS+\int_V u_i^{※}F_i dV \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

基本解が問題の基本境界条件を満足する場合は，右辺の第2項が 0 となり，(1) 式は仮想仕事の原理を表す。(1) 式の左辺を変形して領域での積分を境界での積分にかえる。等方性の線形弾性における弾性係数を C_{ijkl} として，$\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl}$ と表すと，

$$\int_V e_{ij}^{※}\sigma_{ij}dV=\int_V e_{ij}^{※}C_{ijkl}\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})dV$$
$$=\int_{S_a+S_u} e_{ij}^{※}C_{ijkl}u_k\eta_l dS-\int_V e_{ij,l}^{※}C_{ijkl}u_k dV$$
$$=\int_{S_a}\overset{\eta}{T}_k^{※}u_k dS+\int_{S_u}\overset{\eta}{T}_k^{※}\underline{u_k}dS-\int_V \sigma_{kl,l}^{※}u_k dV$$

k, l は総和規約に従い，i, j と置き換わるので

$$=\int_{S_a}\overset{\eta}{T}_i^{※}u_i dS+\int_{S_u}\overset{\eta}{T}_i^{※}\underline{u_i}dS-\int_V \sigma_{ij,j}^{※}u_i dV$$

よって (1) 式は，

$$\int_V \sigma_{ij,j}^{※}u_i dV+\int_V u_i^{※}F_i dV$$
$$=\int_{S_a}(\overset{\eta}{T}_i^{※}u_i-u_i^{※}\underline{\overset{\eta}{T}_i})dS$$
$$+\int_{S_u}(\overset{\eta}{T}_i^{※}\underline{u_i}-u_i^{※}\overset{\eta}{T}_i)dS$$

この式が直接法の基礎式である。以下では，物体力が無い場合について取り扱う。物体力の項が 0 のときの直接法の基礎式は，

$$\int_V \sigma_{ij,j}^{※}u_i dV=\int_{S_a}(\overset{\eta}{T}_i^{※}u_i-u_i^{※}\underline{\overset{\eta}{T}_i})dS$$
$$+\int_{S_u}(\overset{\eta}{T}_i^{※}\underline{u_i}-u_i^{※}\overset{\eta}{T}_i)dS \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

問題に与えられた境界条件から未知の表面力と境界の変位を求める場合は，領域の内部に荷重が作用しない基本解を用いる。このとき $\sigma_{ij,j}^{※}=0$ であるから (2) 式より

$$-\int_{S_u} u_i^{※}\overset{\eta}{T}_i dS+\int_{S_a}\overset{\eta}{T}_i^{※}u_i dS$$
$$=\int_{S_a} u_i^{※}\underline{\overset{\eta}{T}_i}dS-\int_{S_u}\overset{\eta}{T}_i^{※}\underline{u_i}dS \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\underline{\overset{\eta}{T}_i}$, $\underline{u_i}$, $\overset{\eta}{T}_i^{※}$, $u_i^{※}$ は与えられるので，(3) 式が未知数 u_i と $\overset{\eta}{T}_i$ を求める方程式になる。

境界の変位と表面力が求められた後に，領域内の任意の点における変位と応力を計算する場合は，解を求めようとする点に，求めたい変位と同じ方向を向いた単位の集中荷重が作用した場合を基本解に用いる。l 方向の変位を求めようとする場合は，荷重の作用点を含まない領域において $\sigma_{ij,j}^{※}=0$ であり，荷重の作用点を含む微小領域 Ω において，$i\perp l$ のとき $\sigma_{ij,j}^{※}=0$, $i=l$ のとき，

$$\lim_{\Omega\to 0}\int_\Omega \sigma_{ij,j}^{※}d\Omega=-1$$

となるので，(2) 式の左辺は，解を求めようとする点の l 方向の変位に負号が付いた $-u_l$ となる。よって (4) 式のように任意の点の変位の計算式が得られる。

$$u_l=\int_{S_a+S_u}(u_{li}^{※}\overset{\eta}{T}_i-\overset{\eta}{T}_{li}^{※}u_i)dS \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

応力は，(4) 式を偏微分して $\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ に代入し弾性係数をかけて求められる。E を縦弾性係数，ν をポアソン比として，平面応力状態で示すと次式になる。平面ひずみ状態にするには，E と ν を $E/(1-\nu^2)$ と $\nu/(1-\nu)$ に置き換える。せん断応力度は，右回りの回転を与えるものを正とする。$i\neq j$ として，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\Bigg\{&\int\left(\frac{\partial u_{il}^{※}}{\partial i}+\nu\frac{\partial u_{jl}^{※}}{\partial j}\right)\overset{\eta}{T}_l dS\\&-\int\left(\frac{\partial \overset{\eta}{T}_{il}^{※}}{\partial i}+\nu\frac{\partial \overset{\eta}{T}_{jl}^{※}}{\partial j}\right)u_l dS\Bigg\}\end{aligned}\right\}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{-E}{2(1+\nu)}\left\{\int\left(\frac{\partial u_{il}^{※}}{\partial j}+\frac{\partial u_{jl}^{※}}{\partial i}\right)\overset{\eta}{T}_l dS-\int\left(\frac{\partial \overset{\eta}{T}_{il}^{※}}{\partial j}+\frac{\partial \overset{\eta}{T}_{jl}^{※}}{\partial i}\right)u_l dS\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

(4) 式と (5) 式において，例えば $u_{\alpha\beta}$※, $\overset{\eta}{T}_{\alpha\beta}$※ などと表されているものは，変位または応力を求めたい点に α 方向の単位の集中荷重を作用させた基本解において，要素に生じる β 方向の変位と表面力である。直交2方向の β について計算することになる。

間接法の基礎式は，それぞれ重み荷重 W_k をかけた基本解を重ね合せたときの境界値が与えられた境界条件に等しいと置くことから，(6) 式のように表される。ここで，u_i※ と σ_{ij}※ は支配方程式を満足する基本解の変位と応力である。$\overset{\eta}{T}_i$ と η は表面力と境界の外向き法線ベクトルを表す。

$$\left.\begin{array}{l}\text{基本境界 } S_u \text{ 上で } W_k u_i^{※}=\underline{u_i}\\ \text{自然境界 } S_a \text{ 上で } W_k\sigma_{ij}^{※}\eta_j=\underline{\overset{\eta}{T}_i}\end{array}\right\}\cdots\cdots(6)$$

$\underline{u_i}$, $\underline{\overset{\eta}{T}_i}$, u_i※, σ_{ij}※, η_j は与えられるので，(6) 式を解いて重み荷重 W_k が求まる。既知となった重み荷重をかけた基本解を重ね合せて，未知の境界値と領域内の値が計算出来る。間接法の基礎式は，問題と同じ形状の境界をもつ外部領域を想定しその境界上に未知の表面力 $\overset{\eta}{T}_i'$ を作用させ，外部領域と問題の領域について (3) 式および (4) 式と同じ方法で境界積分方程式を導き，両者の境界変位が等しいとおく方法によると，次式のように表される[16),17)]。

$$u_l=\int u_{li}^{※}(\overset{\eta}{T}_i+\overset{\eta}{T}_i')dS$$

この式は，相反作用の原理から u_{li}※$=u_{il}$※ であり，未知数 ($\overset{\eta}{T}_i+\overset{\eta}{T}_i'$) を重み荷重 W_k とみなすと (6) 式と同じである。従来，未知数 ($\overset{\eta}{T}_i+\overset{\eta}{T}_i'$) の物理的意味が不明確であるとされていたが，基本解の重ね合せの立場で考えると，それは基本解にかける重み荷重の大きさを表している。

2-3 基 本 解

間接法は，支配方程式を満足し，与えられた問題の領域を包含する解であればすべて基本解に利用出来る。解法に汎用性を持たせるためには，基本解の種類を限定する必要がある。間接法における基本解に関する研究が報告されている[6),8)~15)]。無限平板に集中荷重が作用した場合，半無限平板の無限縁の一部に荷重が分布または集中して作用した場合などが代表的である。

直接法の場合は，境界の変位と表面力を求める (3) 式において，支配方程式を満足する解であれば，すべて基本解として利用出来るが，(4)，(5) 式から内部の応力と変位を求める時に用いる基本解と同じにするのが便利であり，無限平板の1点に単位の集中力が作用した場合が基本解として用いられる[5),7),16)]。

2-4 境 界 要 素

境界要素法は，解析モデルにおける境界条件の近似性が解の精度を左右する。曲線の要素また表面力と変位が高次に分布する要素でモデル化した場合は，境界条件の再現性がすぐれており，精度の良い解を導ける可能性のあることが示されている[5)]。この場合は，個々の問題について有効であるが，汎用性のあるプログラムの開発は困難である。線分の要素で境界値が比較的低次に分布する解析モデルを用いた場合は，要素数を増やすことにより，任意の形状の問題に適用出来る可能性がある。境界要素における表面力と変位の近似性は，基本的には表—1 のようである。直接法の場合は，表面力と変位はそれぞれ独立した分布状態を用いることができるが，表面力に対し次数が1つ高い分布状態の変位を組み合せるのが合理的である。境界条件の自由度は，重み荷重，表面力，変位のいずれにおいても等分布の要素の場合，直交2方向について 2 となる。直接法で変位が線形のときは，要素の接合点で連続した条件にすることができるので自由度は2であるが，表面力が線形のときは，要素の接合点で不連続になるので，自由度は4である。通常，要素の数に自由度をかけると解くべき連立方程式の元数，すなわち未知数の数になるが，直接法の場合は問題に与えられている境界条件をすべて既知数にすることが可能である。

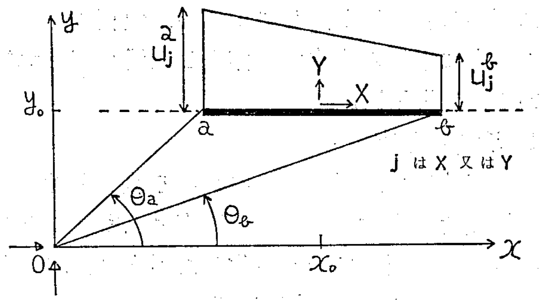
3. 直接法における境界積分の解析値

間接法については，積分計算の解析値がすでにいくつか報告されているが[10)~15)]，直接法の積分における解析値の報告は少ない。ここでは，直接法で表面力が等分布し変位が線形に分布する要素を用いた場合の基本解の解析値を平面応力状態で示す。基本解は1点に単位の集中力が作用する無限平板であり，間接法の所で導いた解[15)]を用いる。

要素上で線形に分布する変位を図—1 のように表す。実体が右手にあるような要素の方向を x 軸の正の方向とする直交座標 xy を設ける。基本解の単位荷重の作用点を原点Oとする。x 軸の正の方向を向く単位荷重について添字 x で，y 軸の正の方向を向く単位荷重について添

表—1 境 界 要 素

	要素の種類	自由度	近似される境界条件（各要素において）表面力	近似される境界条件（各要素において）変位
間接法	重み荷重が一定	2	一定	線形
	重み荷重が線形	4	線形	2次
直接法	表面力が一定	2	一定	線形
	表面力が線形	4	線形	2次
	変位が一定	2	——	一定
	変位が線形	2	一定	線形
	変位が2次	4	線形	2次



図―1　境界要素における線形の変位

字 y で表す。要素の中心の座標を (x_0, y_0) とする。要素上で変位と表面力の方向を，x 軸の正の方向について添字 X で，y 軸の正の方向について添字 Y で表す。表面力は等分布しており T で表す。要素の始点を a 終点を b とする。図―1 に示す記号のほか次の記号を用いる。

E：縦弾性係数，ν：ポアソン比，$\alpha=\dfrac{(\nu-3)(\nu+1)}{4\pi E}$

$$\beta=\frac{(\nu+1)^2}{4\pi E},\quad AA=\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{\sin\theta_a}\right|,\quad TT=\cot\theta_b-\cot\theta_a$$

$$SS=\sin 2\theta_b-\sin 2\theta_a,\quad CC=\cos 2\theta_b-\cos 2\theta_a$$

$$SQ=\sin 4\theta_b-\sin 4\theta_a,\quad CQ=\cos 4\theta_b-\cos 4\theta_a$$

$$EE=\cot\theta_b\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{y_0}\right|-\cot\theta_a\ln\left|\frac{\sin\theta_a}{y_0}\right|$$

$$QQ=(x_0+t)\ln|x_0+t|-(x_0-t)\ln|x_0-t|$$

$$BB=\ln\left|\frac{x_0+t}{x_0-t}\right|,\quad AB=\frac{1}{x_0+t}-\frac{1}{x_0-t},\quad FF=\theta_b-\theta_a$$

(3) 式を境界要素で離散化し積分値を G_{ij} と H_{ij} で表すと次のようになる。

$$\sum\{-G_{ij}T_j+H_{ij}{}^a u_j{}^a+H_{ij}{}^b u_j{}^b\}=\sum\{G_{ij}\underline{T_j}-H_{ij}{}^a\underline{u_j{}^a}-H_{ij}{}^b\underline{u_j{}^b}\}\quad\cdots\cdots(7)$$

$y_0\neq 0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}&G_{xX}=-y_0\{\alpha(EE+TT)+(\alpha-\beta)FF-\beta TT\}\\&G_{yY}=-y_0\{\alpha(EE+TT)+(\alpha+\beta)FF\}\\&G_{xY},\ G_{yX}=-y_0\beta AA\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots(8)$$

$y_0=0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}&G_{xX}=\alpha QQ-2t(\alpha-\beta)\\&G_{yY}=\alpha(QQ-2t)\\&G_{xY},\ G_{yX}=0\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots(9)$$

$y_0\neq 0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}&H_{xX}{}^a,\ H_{xX}{}^b=\kappa[\varphi\{4FF+(1+\nu)SS\}\\&\qquad-y_0\{2(3+\nu)AA+(1+\nu)CC\}]\frac{1}{16\pi t}\\&H_{xY}{}^a,\ H_{xY}{}^b=\kappa[\varphi\{-2(1-\nu)AA-(1+\nu)CC\}\\&\qquad-y_0\{4FF+2(1-\nu)TT+(1+\nu)SS\}]\frac{1}{16\pi t}\\&H_{yX}{}^a,\ H_{yX}{}^b=\kappa[\varphi\{2(1-\nu)AA-(1+\nu)CC\}\\&\qquad-y_0\{4\nu FF-2(1-\nu)TT+(1+\nu)SS\}]\frac{1}{16\pi t}\\&H_{yY}{}^a,\ H_{yY}{}^b=\kappa[\varphi\{4FF-(1+\nu)SS\}\\&\qquad-y_0\{2(1-\nu)AA-(1+\nu)CC\}]\frac{1}{16\pi t}\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots(10)$$

$y_0=0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}&H_{xY}{}^a,\ H_{xY}{}^b=\kappa\left(\varphi\frac{BB}{2t}-1\right)\frac{1-\nu}{4\pi}\\&H_{yX}{}^a,\ H_{yX}{}^b=-\kappa\left(\varphi\frac{BB}{2t}-1\right)\frac{1-\nu}{4\pi}\\&\left.\begin{aligned}&H_{xX}{}^a,\ H_{xX}{}^b\\&H_{yY}{}^a,\ H_{yY}{}^b\end{aligned}\right\}=\left\{\begin{aligned}&0\quad(|x_0|>t\ \text{のとき})\\&\kappa\frac{\varphi}{4t}\quad(|x_0|<t\ \text{のとき})\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots(11)$$

ここで a のとき $\kappa=1$, $\varphi=x_0+t$, b のとき $\kappa=-1$, $\varphi=x_0-t$

内部の変位を求める (4) 式の場合は，要素で離散化すると次になる。

$$u_i=\sum\{G_{ij}T_j-H_{ij}{}^a u_j{}^a-H_{ij}{}^b u_j{}^b\}\quad\cdots\cdots(12)$$

G_{ij} と H_{ij} は，(11) 式の一部を次のように変えたときの (8)～(11) 式と同じである。

$$\left.\begin{aligned}&H_{xX}{}^a,\ H_{xX}{}^b\\&H_{yY}{}^a,\ H_{yY}{}^b\end{aligned}\right\}=\left\{\begin{aligned}&0\quad(|x_0|>t\ \text{のとき})\\&-\kappa\frac{\varphi}{4t}\quad(|x_0|<t\ \text{のとき})\end{aligned}\right.\quad\cdots\cdots(13)$$

(11) 式と (13) 式の違いは，未知の境界値を求める (3) 式において，基本解の荷重の作用点が領域の外部と考えた要素上にあるのに対し，内部の変位を求める (4) 式では，基本解の荷重の作用点が領域の内部と考えた要素上にあるからである。

内部の応力を求める (5) 式を要素で離散化し，積分値を D_{lj} と S_{lj} で表すと，$l=x,\ y,\ xy$, $j=X,\ Y$ として，次式になる。

$$\sigma_l=\sum\{D_{lj}T_j-S_{lj}{}^a u_j{}^a-S_{lj}{}^b u_j{}^b\}\quad\cdots\cdots(14)$$

$y_0\neq 0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}&D_{xX}=-\{2(3+\nu)AA+(1+\nu)CC\}\frac{1}{8\pi}\\&D_{xY}=-\{4\nu FF+(1+\nu)SS\}\frac{1}{8\pi}\\&D_{yX}=-\{-2(1-\nu)AA-(1+\nu)CC\}\frac{1}{8\pi}\\&D_{yY}=-\{4FF-(1+\nu)SS\}\frac{1}{8\pi}\\&D_{xy,X}=\{4FF+(1+\nu)SS\}\frac{1}{8\pi}\\&D_{xy,Y}=\{2(1-\nu)AA-(1+\nu)CC\}\frac{1}{8\pi}\end{aligned}\right.\quad\cdots(15)$$

$y_0=0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}&D_{xX}=\frac{3+\nu}{4\pi}BB\\&D_{xY}=0\quad(|x_0|>t\ \text{のとき})\quad=\frac{\nu}{2}\quad(|x_0|<t\ \text{のとき})\\&D_{yX}=-\frac{1-\nu}{4\pi}BB\\&D_{yY}=0\quad(|x_0|>t\ \text{のとき})\quad=\frac{1}{2}\quad(|x_0|<t\ \text{のとき})\\&D_{xyX}=0\ (|x_0|>t\ \text{のとき})\quad=-\frac{1}{2}\ (|x_0|<t\ \text{のとき})\end{aligned}\right.$$

$$D_{xyY}=-\frac{1-\nu}{4\pi}BB \qquad \cdots\cdots(16)$$

$y_0 \neq 0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}
&S_{xX}^{a},\ S_{xX}^{b}=-\kappa\left\{\frac{\varphi}{4y_0}\left(CC+\frac{1}{2}CQ\right)+\left(FF+\frac{3}{4}SS+\frac{1}{8}SQ\right)\right\}\frac{E}{4\pi t}\\
&S_{xY}^{a},\ S_{xY}^{b}=-\kappa\left\{\frac{\varphi}{4y_0}SQ-\left(AA+CC+\frac{1}{4}CQ\right)\right\}\frac{E}{8\pi t}\\
&S_{yX}^{a},\ S_{yX}^{b}=-\kappa\left\{\frac{\varphi}{y_0}\left(CC-\frac{1}{2}CQ\right)-\left(SS+\frac{1}{2}SQ\right)\right\}\frac{E}{16\pi t}\\
&S_{yY}^{a},\ S_{yY}^{b}=-\kappa\left\{\frac{\varphi}{y_0}\left(SS-\frac{1}{4}SQ\right)-\left(AA-\frac{1}{4}CQ\right)\right\}\frac{E}{8\pi t}\\
&S_{xyX}^{a},\ S_{xyX}^{b}=\kappa\left\{\frac{\varphi}{4y_0}SQ-\left(AA+CC+\frac{1}{4}CQ\right)\right\}\frac{E}{8\pi t}\\
&S_{xyY}^{a},\ S_{xyY}^{b}=\kappa\left\{\frac{\varphi}{y_0}\left(CC-\frac{1}{2}CQ\right)-\left(SS+\frac{1}{2}SQ\right)\right\}\frac{E}{16\pi t}
\end{aligned}\right. \qquad \cdots\cdots(17)$$

$y_0=0$ のとき

$$\left\{\begin{aligned}
&S_{xX}^{a},\ S_{xX}^{b}=0 \quad (|x_0|>t \text{ のとき})\\
&\qquad\qquad =-\kappa\frac{E}{4t} \quad (|x_0|<t \text{ のとき})\\
&S_{xY}^{a},\ S_{xY}^{b},\ S_{yY}^{a},\ S_{yY}^{b}=-\kappa(\varphi\cdot AB+BB)\frac{E}{8\pi t}\\
&S_{xyX}^{a},\ S_{xyX}^{b}=\kappa(\varphi\cdot AB+BB)\frac{E}{8\pi t}\\
&S_{yX}^{a},\ S_{yX}^{b},\ S_{xyY}^{a},\ S_{xyY}^{b}=0
\end{aligned}\right. \qquad \cdots\cdots(18)$$

ここで a のとき $\kappa=1$, $\varphi=x_0+t$, b のとき $\kappa=-1$, $\varphi=x_0-t$

変位が等分布する要素を用いた場合の解析値は，(7)，(12)，(14) 式で u^a と u^b を同じとして係数を加えると求まり，(10)，(11)，(13)，(17)，(18) 式に含まれる。平面応力状態について導いており，平面ひずみ状態とするには弾性係数を置き替えればよい。以上 (7)～(18) 式で示した解析値のうち，G_{ij} において $y_0=0$ の場合の (9) 式がすでに報告されている[20]。

4. 解析プログラムと解の精度

4-1 解析プログラム

表面力が等分布し変位が線形に分布する線分の要素を用いた直接法の解析プログラムを作成し，すでに報告[15]している重み荷重が等分布する要素を用いた間接法のプログラムと共に，例題に適用して検討する。また一定要素を用いた直接法についても，解析積分値を用いたプログラムを作成し，解を比較している。これらはいずれも要素上の自由度が2であり，同じ数の境界要素を設定したモデルについて，数値計算上ほぼ同じ条件で解析方法相互を比較することが出来る。

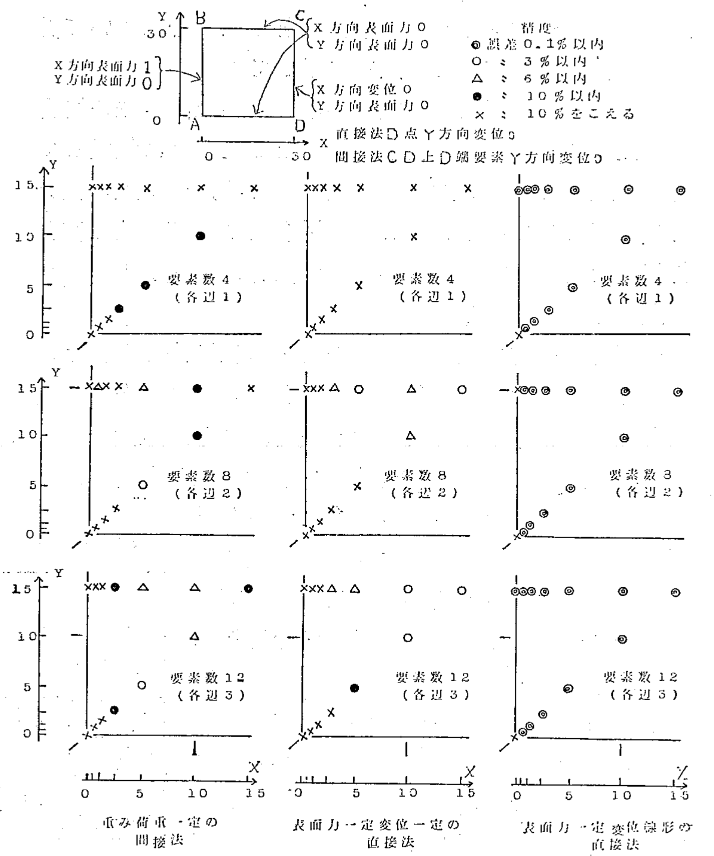
4-2 表面力が等分布の問題

均一な単軸引張を受ける場合は，境界の表面力が一定で変位が線形の問題である。1つの辺で辺に垂直な方向の変位が固定され，対辺で辺に垂直な等分布の表面力が作用している正方形の問題を，1つの辺に 1，2 または 3 個の要素を設定した解析モデルを設定して計算すると結果の精度は図—2 になる。

重み荷重が等分布する要素を用いた間接法は，図—2 のように要素数の少ない解析モデルについて計算結果の精度が悪い。間接法は，要素数の少ないモデルを設定すると，充分な精度の解を得られない。

表面力と変位が共に一定な要素を用いた直接法では，境界の近傍で誤差を生じる。これは境界上の線形に分布する変位を，変位が一定の要素で近似したために生じる誤差であり，このことはすでに指摘されている[16),22)]。その誤差の大きさは，要素の中点から境界に垂直な方向の距離が L である内点について計算すると，表—2 の値になる。

表面力が一定で変位が線形である要素を用いた直接法



図—2 表面力が等分布の平板

表—2 要素の方向と平行な均一の垂直応力度 σ が作用したときの要素と平行な方向の垂直応力度の計算値において，要素の変位に起因して計算される値

境界からの距離 L	0	0.125t	0.25t	0.5t	t
変位が線形の要素に起因する応力※	0.500σ	0.388σ	0.277σ	0.123σ	0.011σ
変位が一定の要素に起因する応力	0				

※：厳密解,17 18式で $X_0=0,\ Y_0=L,\ U^a=-\sigma\cdot t/E,\ U^b=\sigma\cdot t/E$ のとき
t：要素の長さの 1/2

による計算結果は，図—2 のように問題の境界条件に要素の種類が適合するときは，きわめて精度が良い。要素の接合点の周りのごく微小な部分において誤差を生じるのは，要素の接合点が計算式上の特異点となるためである。直接法の場合は，間接法と違った計算過程における障害がある。図—2 の問題で変位の拘束条件を抜き，表面力だけを与えて計算すると，単精度（有効数字 6 桁程度）では解が得られない。倍精度にすると解は求まるが，非常に大きな剛体変位を含む，これは直接法の基礎式の (3)，(7) 式において，変位がすべて未知数のとき，剛体変位を含む解であっても等号を成立させるからである。直接法では，剛体変位を消去する場合に変位の拘束条件が必要になる。

4-3　均一な内圧を受ける円孔のある無限問題

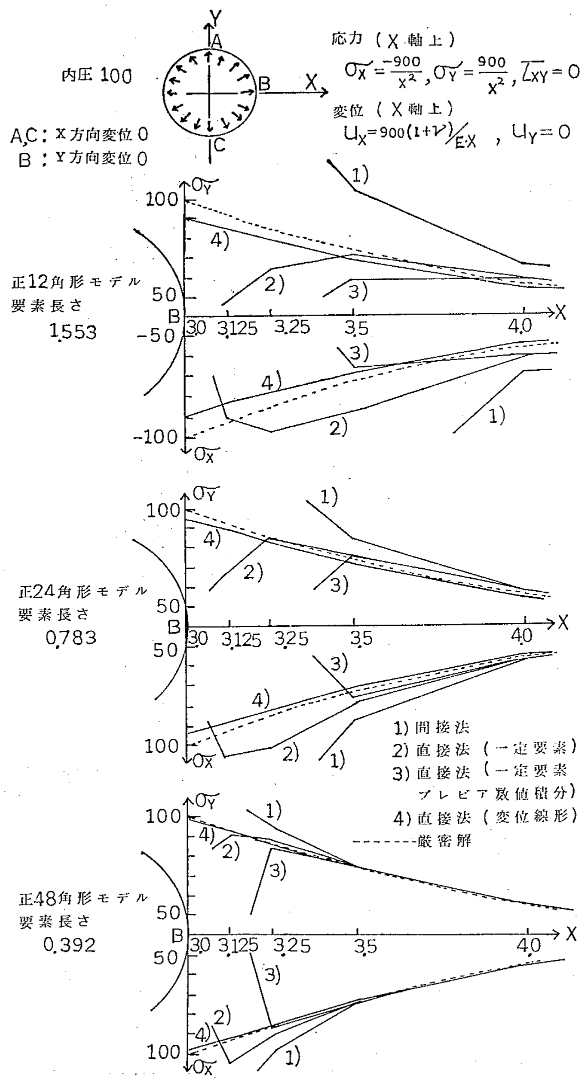
図—3 は，均一な内圧を受ける円孔のある無限問題の計算結果である。この問題は，ブレビアによりすでに発表されている表面力と変位が一定の要素を用いた直接法のプログラム[21]において，例題に取り上げられたものである。ブレビアのプログラムを複製し，連立方程式の解法のサブルーチンを替え，単精度とした場合について計算した結果を比較のため図中に示してある。

表面力と変位が共に一定な要素を用いた直接法の場合は，先に述べたように変位を一定としたことに起因して境界の近傍で誤差が生じる。図—3 では，要素上の積分を数値積分しているブレビアの場合より，解析的に積分を行った場合の方が，境界に近い部分の誤差が小さくなる傾向を示している。

表面力が一定で変位が線形の要素の直接法の場合は，円形を多角形でモデル化したことと，高次に分布する変位を線形に分布する変位に置き換えたことが原因となって，境界上および境界の近傍で必然的な誤差を含むが，その割合は小さい。要素数を多くすると計算結果の精度は表のようにきわめて良くなる。表—3 は精度の良かった正 48 角形のモデルについて計算結果と厳密解を比較したものである。

直接法の場合は，表面力が一定で変位が線形の要素を用いて要素の数を多くすると，このような問題では境界の近傍も含めて精度の良い解を得ることが出来るが，弾性係数のディメンジョンの取り方に注意が要る。図—3 は，縦弾性係数を 200 とした結果である。縦弾性係数を 2×10^6 にすると，単精度（有効数字 6 桁程度）では満足な解が求まらない。

間接法は，このような形状の問題の場合，基本解として 1 点に集中力が作用した無限平板を用いることになり，計算結果の精度は，境界からの距離が要素の長さより大きい部分において満足出来る。このことは間接法に関する報告においてすでに示している[15]。



図—3 内圧を受ける円孔のある無限平板

表—3 内圧を受ける円孔のある無限平板の応力と変位（正 48 角形モデル）

		図—3のBX上のX座標						
		2.9936 4)	3.125	3.25	3.5	4	6	10
厳密解	σ_X 1)	(−100)	−92.16	−85.21	−73.47	−56.25	−25.00	−9.00
	σ_Y 2)	(100)	92.16	85.21	73.47	56.25	25.00	9.00
	U_X 3)	(1.650)	1.584	1.523	1.414	1.238	0.825	0.495
重み荷重が等分布の間接法	σ_X	—	−166.4	−99.77	−75.12	−57.09	−25.38	−9.14
	σ_Y	—	130.1	94.83	74.77	57.08	25.37	9.13
	U_X	1.676	1.636	1.552	1.436	1.256	0.837	0.502
表面力一定で変位が線形の直接法	σ_X	−97.17	−91.26	−84.77	−73.25	−56.13	−24.96	−8.98
	σ_Y	98.00	91.68	84.96	73.28	56.12	24.95	8.98
	U_X	1.649	1.581	1.520	1.412	1.235	0.824	0.494

σ_X X方向垂直応力度　σ_Y Y方向垂直応力度　U_X X方向変位
1)：$-900/X^2$　2)：$900/X^2$　3)：$900(1+\nu)/EX$，E=200，ν=0.1　4)：要素上

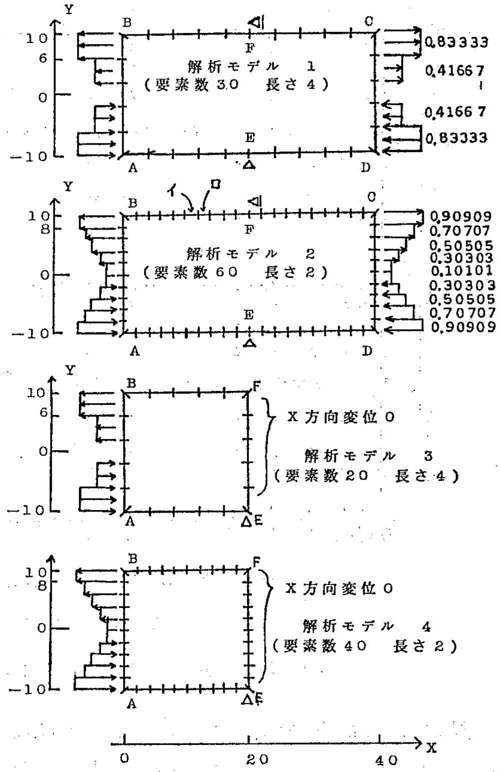
4-4　表面力が線形分布の問題

図―4 は，境界 AB と CD における表面力が線形分布で変位が 2 次分布の問題である。短辺の 1/5 または 1/10 の長さの境界要素を設定し，図―5 のようにモデル化する。

図―6 は，解析モデル 1 と 2 について，間接法と直接法の計算結果を比較したものである。重み荷重が等分布する要素を用いた間接法の場合は，要素分割を細かくすると精度が良く，解析モデル 2 の計算結果では，隅部を除いて満足出来る結果が得られている。

直接法の場合は，隅部から離れた部分においても誤差が生じており，計算結果の精度は良くない。

表―4 は，解析モデル 2 について，重み荷重が等分布する要素を用いた間接法と，表面力が一定で変位が線形の要素を用いた直接法で計算された境界 BF 上の変位を，隣接する要素または隣り合った要素接合点における値の差で表したものである。間接法の場合は，端部に近い所で誤差を含むが，端部から離れると精度が良い。直接法の場合は，境界の全体にわたってきわめて誤差が大きい。直接法におけるこれらの値は，(3) 式を変形した (7) 式に基づく連立方程式の根の差に相当し，連立方程

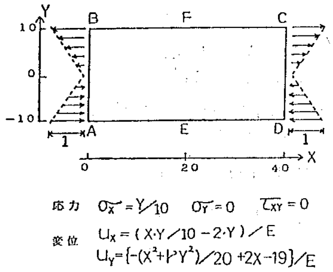


図―5　表面力が線形分布の平板の解析モデル

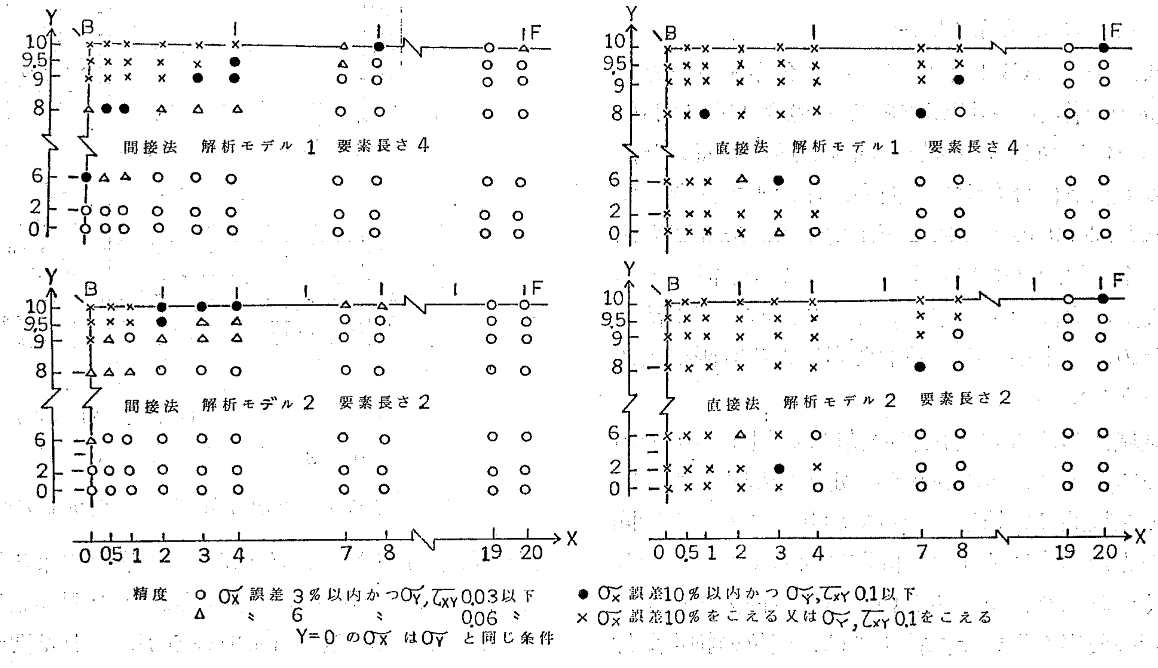
表―4　表面力が線形分布の平板の計算結果で再現された境界の変位

重み荷重が等分布の間接法	図―5　解析モデル 2 の境界 B F 上の要素の中心の X 座標　1　3　5　7　9　11　13　15　17　19　21											
	△U$_X$	計算値	2.45	2.65	2.14	1.98	1.98	1.98	1.98	1.98	1.98	1.97
		厳密解	2.00									
	△U$_Y$	計算値	4.52	3.83	3.30	2.72	1.98	1.58	1.19	0.79	0.39	0
		厳密解	3.60	3.20	2.80	2.40	2.00	1.60	1.20	0.80	0.40	0
表面力一定変位線形の直接法	図―5　解析モデル 2 の境界 B F 上の要素接合点の X 座標　0　2　4　6　8　10　12　14　16　18　20											
	△U$_X$	計算値	1.50	3.87	−0.43	4.01	1.10	1.30	3.84	−0.42	4.06	1.03
		厳密解	2.00									
	△U$_Y$	計算値	6.26	1.91	3.13	3.94	−0.03	4.16	−0.13	1.22	−1.77	1.66
		厳密解	3.80	3.40	3.00	2.60	2.20	1.80	1.40	1.00	0.60	0.20

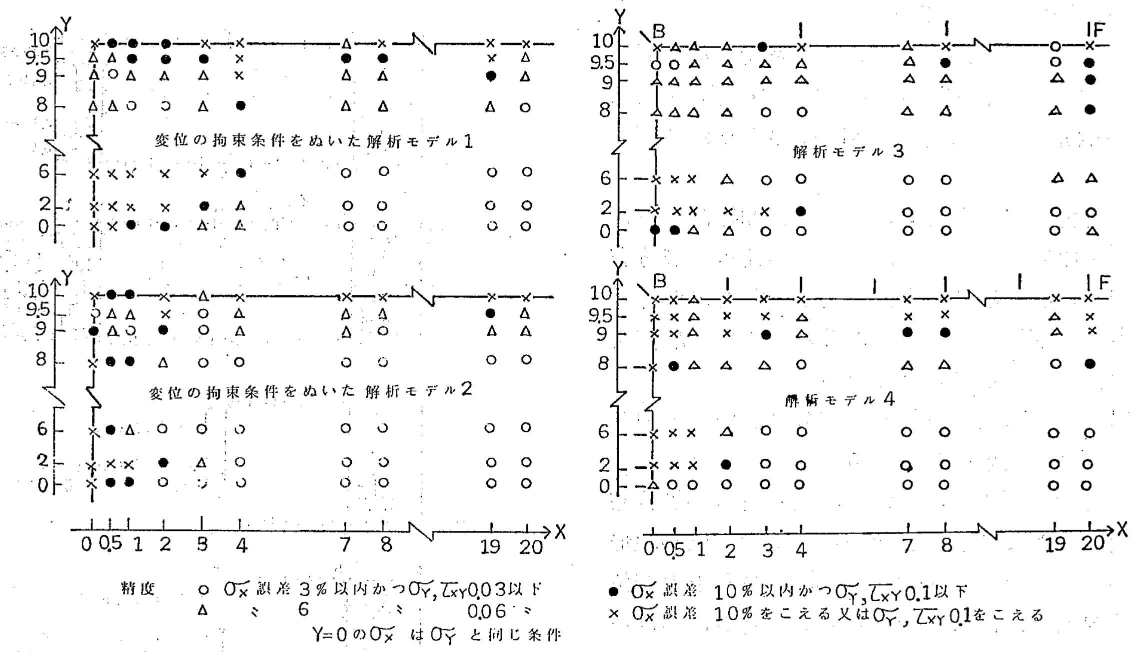
△U$_X$：X 方向変位の差　△U$_Y$：Y 方向変位の差　（E＝1，ν＝0.2）



図―4　表面力が線形分布の平板



図―6　表面力が線形分布の平板の解板モデル 1 と 2 の間接法と直接法による計算結果



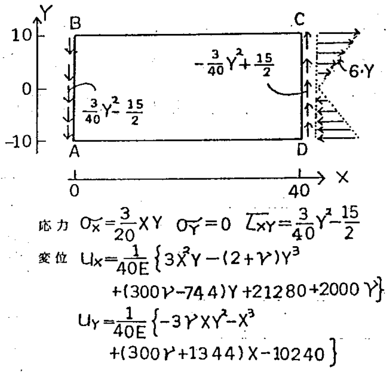
図—7 表面力が線形分布の平板の拘束条件を変えたモデルによる直接法の計算結果

式の根の精度が不充分であることを表している。

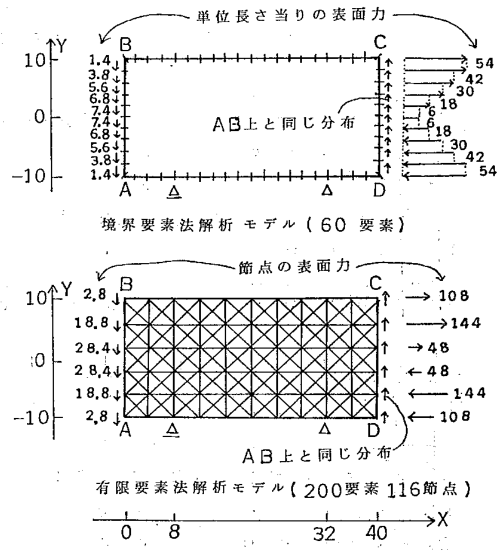
直接法における誤差を調べるため，解析モデル1と2で変位の拘束条件をぬき表面力だけの境界条件を与えた場合と，問題を対称軸で2分した解析モデル3と4について計算した結果が図—7である。変位の拘束条件をぬいた場合は，大きな剛体変位を含んだ解となるが，要素分割が細かくなると誤差が小さくなっており，解析モデル2の計算結果の精度は比較的良い。変位の拘束条件の付いた解析モデル3と4の結果は，解析モデル1と2の場合より精度が向上しているが，解析モデル3に比べると要素の設定が細かい解析モデル4は，境界条件の近似性が良くなっているにもかかわらず，解の精度がかえって低下している。

4-5 表面力が2次分布の問題

図—8は，境界ABにおいて2次に分布する境界にそった表面力が作用する問題である。境界CDにおいて，境界ABと同じ分布状態で向きが逆の表面力と，境界に垂直で線形に分布する表面力が作用して釣合っている。これを図—9のようにモデル化する。境界要素法モデルは，全境界を60等分するように要素を設けており，各要素上の表面力を一定にしている。有限要素法と比較するため，一定ひずみ三角形要素による有限要素法モデルを設定している。

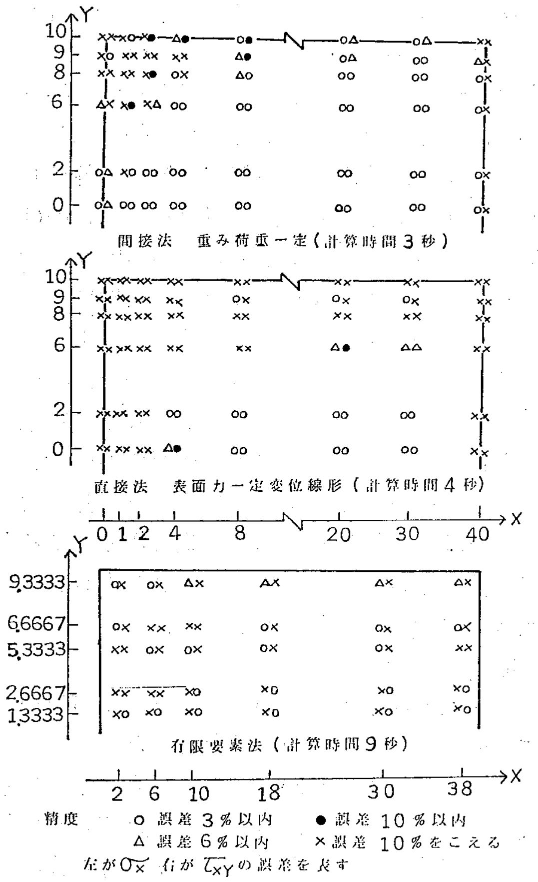


図—8 表面力が2次分布の平板



図—9 表面力が2次分布の平板の解析モデル

全体の領域における計算結果の精度は，図—10である。境界要素法では，重み荷重が一定の間接法の場合隅部を除いて比較的良い結果となっており，このように間接法は表面力が高次に分布する問題に対しても，要素分割を細かくすれば有効であるといえる。表面力が一定で変位が線形の要素を用いた直接法では，変位の拘束条件が付いたモデルの計算結果を示しており，先に述べた表面力が線形分布する平板と同じく，満足出来る結果が得られていない。図—10に表示された有限要素法による結果は，大きな誤差を含んでいるが，これは要素内で一定値として計算された応力を，要素の重心の位置におけ

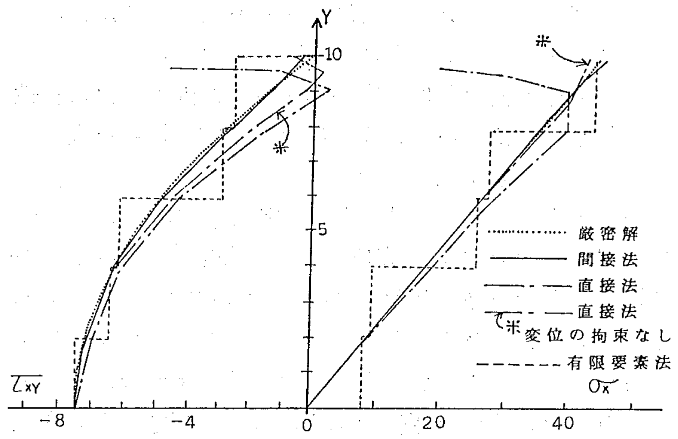


図—10　表面力が2次分布の平板の計算結果の精度

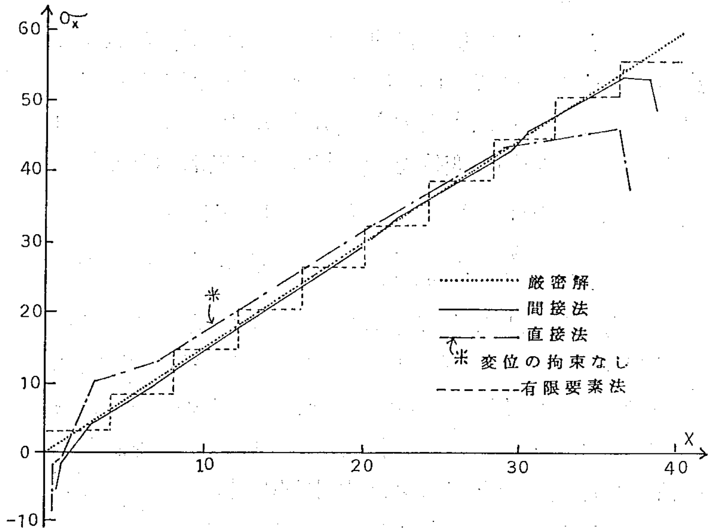
る厳密解と比較したためである。

図—11 は，$X=30$ における断面の垂直応力度 σ_X とせん断応力度 τ_{XY} の計算結果を示したもので，間接法による境界要素法によりすぐれた結果が得られている。有限要素法による計算値は，要素間で不連続な値となるため階段状の表示となるが，厳密解をその表示値内に含んでいる。直接法の場合は，変位の拘束条件が付いたモデルで計算すると，境界から離れた部分においてもかなりの誤差が出ている。図中には，変位の拘束条件をはずしたモデルについて直接法で計算した値ものせており，比較的に誤差は少ないが，間接法による結果より劣り，また非常に大きな剛体変位を含んだ解になっている。

図—12 は，境界 BC 上の垂直応力度 σ_X の計算結果を示したものである。間接法による境界要素法で計算した結果は，隅部から離れた区域で良い精度になっている。これまで間接法で種々計算を試みた結果，隅部から要素の長さの 2〜4 倍以上離れると，満足出来る精度が得られるように思える。図—12 に示した直接法の算計結果は，変位の拘束条件をはずしたモデルについて求めたもので，境界 BC の中央部では誤差を含んでいるがまともな値となっており，また大きな剛体変位を含んでいる。図—9 の変位の拘束条件を入れたモデルを直接法で計算すると，境界 BC 上の応力は，図—12 に表示出来ない程の大きな誤差を含む。



図—11　表面力が2次分布の平板の $X=30$ における垂直応力度 σ_X とせん断応力度 τ_{XY}



図—12　表面力が2次分布の平板の境界 BC における垂直応力度 σ_X

4-6　解の精度の考察

直接法は，その解法の原理上非常に精度の高い解を求められる可能性があるはずであるが，今回の数値計算例では解の精度は満足出来るものではなかった。直接法より間接法の方が数値計算上有利であるという示唆も示されており[22),23)]，直接法は解決すべき問題を残している。今回出てきた直接法における問題点を整理すると次の4点になる。

a)　変位の拘束条件を入れない問題（第2種境界値問題）では，剛体変位を含んだ解となり，数値計算上有効数字の桁数が少ないと解不能となった。

b)　境界条件が表面力と変位の両方で与えられた問題でしばしば大きな誤差が生じ，この誤差は，基礎式から構成された連立方程式を解いた時点ですでに発生していた。このような問題では，境界条件の近似性を良くする目的で要素の数を増やしても，解の精度は向上しなかった。

c)　変位が一定の要素を用いると連立方程式の解に信頼性のある場合でも境界の近傍で誤差が生じた。こ

の誤差は，要素の数を増やすかまたは変位が線形の要素を採用することにより改善出来た。

d）変位の拘束条件と表面力を与えた問題では，弾性係数を調節するか，または有効数字の桁数を大きくしないと解が求まらなかった。

以上のうち，c）と d）は解決出来た問題である。a）は，表面力が与えられ変位を求める問題において，(3) 式の未知数の係数の代数和が 0 になることが原因である。従って，剛体変位を消去するには変位の拘束条件を付けなければならない。b）は直接法の重要なポイントであり，直接法の汎用性を示すにはこの問題，即ち変位の拘束条件が付いた問題で，(3) 式を離散化した (7) 式に基づく連立方程式の解に含まれる誤差について検討しなければならない。

このことについて結論は得られていないが，これまで調べたことについて，図—5 のモデル 2 を例にとって説明する。与えられた表面力を $\underline{\overset{\eta}{T}_i}$, 点 E と F で与えられた変位を $\underline{u_i}$, 未知の変位を u_i, 基本解の表面力と変位を $\overset{\eta}{T}_i$※ と u_i※ とすると，(7) 式は (19) 式になる。

$$-\sum_{S\neq E,F}\overset{\eta}{T}_i{}^{※}u_i=\sum_{S=E,F}\overset{\eta}{T}_i{}^{※}u_i+\sum_{S}u_i{}^{※}\overset{\eta}{T}_i \quad \cdots\cdots(19)$$

表面力 $\overset{\eta}{T}_i$※ は基本解全体としては釣り合っているので境界全体では $\sum\overset{\eta}{T}_i{}^{※}=0$ である，(19) 式の左辺の $\overset{\eta}{T}_i$※ は未知数の係数であり，E 点と F 点の $\overset{\eta}{T}_i$※ が抜けた残りである。このため例えば E, F 点から離れた所に荷重の作用点をあてはめた基本解の場合は $\sum_{S\neq E,F}\overset{\eta}{T}_i{}^{※}$ の値の絶対値がきわめて小さく，誤差が生じやすくなる。次に (19) 式の右辺であるが，代数和を取っているので有効数字の桁落ちが起こる。図—5 のモデル 2 では表面力が外向きと内向きで分布しているので，$u_i{}^{※}\underline{\overset{\eta}{T}_i}$ の値に正負が生じやすく桁落ちの傾向が著しい。基本解のあてはめ方の影響では，例えば図—5 モデル 2 でイとロで示した要素に基本解の荷重の作用点があるときは，イとロの場合で得られる方程式の係数と定数項に強い類似性が現れる。このように数値計算上の誤差の原因はいくつか考えられるが，倍精度等で計算を試み，またマトリックスのノルムから誤差の上下限を調べると，これらが根本的な原因でないように思える。表面力が一定で変位が線形の要素を用いているが，境界条件のモデル化には誤差が生じる。この誤差のため (19) 式を解いたときの解に信頼性がなくなるのではないかと推察している。例えば，境界条件が完全にモデル化出来る単軸引張を受ける問題や，対称性があり境界条件のモデル化に含まれる誤差が数値計算上打ち消し合うのではないかと推測される問題では精度の良い解が出ている。そのような問題は限られており，一般の問題において，低次の要素を用いた直接法で汎用性のある解法を開発するのは，非常に困難であると考える。

間接法の場合は，今回の例題またすでに報告[15]しているように良好な結果が得られ，要素分割を細かくすれば，境界条件にかかわらず満足出来る解が得られている。誤差が大きくなる隅部はそこだけ細分割した要素を設けるが，または精度の良い部分の解から外挿して求めるなどの方法がある。間接法で誤差が大きいのは，細長い問題や同一領域で境界が近接している問題などであり，これらについては仮想境界を設けて領域をいくつかのブロックに分割する方法が解の精度の向上に有効である。間接法で良好な解が求まることの理由については，基礎式である (6) 式の未知数に付く係数と定数項が，各々の方程式において表面力または変位のいずれか一方に統一されていることが挙げられる。また基本解にかける重み荷重即ち未知数が，重み荷重を作用させる要素の境界値と強く結びついており，数値計算上有利であることが大きな原因であると考えられる。

5. 結　論

等方性二次元線形弾性問題を対象とした境界要素法について，直接法と間接法の比較を行った。

変位の分布状態の次数が表面力の分布状態の次数より 1 つ高い境界要素を用いた直接法は，精度の高い解を求めることが可能であると考えられるが，今回作成した表面力が一定で変位が線形に分布する境界要素を用いた直接法のプログラムでは，境界条件が表面力と変位の両方で与えられた問題について，計算結果に信頼性を持てない場合があり，低次の要素を用いた直接法による汎用プログラムの開発は困難であると考えられた。

重み荷重が等分布する境界要素を用いた間接法は，境界要素を細かく設定したモデルについて計算すると，精度の良い解が得られ，低次の境界要素を用いた汎用プログラムの開発において，間接法は直接法よりすぐれていると考えられた。

文　献

1) M.A. Jaswon, Integral Equation Methods in Potential Theory I, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 275, 1963, pp. 23～32

2) T.A. Cruse, An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis, Comp. & Struct., Vol. 4, pp. 741～754, Pergamon Press

3) J.C. Lachat, J.O. Watson, A Second Generation Boundary Integral Equation Program for Three-Dimensional Elastic Analysis, ASME Proc. AMD, 11, 1975, pp. 85～100

4) 登坂宣好，境界積分方程式法の適用について，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和 52 年 10 月

5) 蔦　紀夫，山地成一，周辺積分有限要素法とその応用，日本機械学会論文集，A編，46 巻，412 号，pp. 1421～1430，昭和 55 年 12 月

6) C. Massonnet, Numerical Solution of Edge-Load Problems by Superposition of Radial Stress Systems, Handbook of Engineering Mechanics, pp. 37-1～37-30, McGraw-Hill, 1962

7) C.A. Brebbia, Recent Advances in Boundary Element Methodes, 1978, Pentech Press
8) 西谷弘信，電子計算機による二次元応力問題の解法，日本機械学会誌，第 70 巻，580 号，pp. 627～635，昭和 42 年5月
9) 岸谷孝一，平居孝之，コンクリートの割裂引張試験に関する考察（半無限板法による割裂引張試験供試体内部応力度の弾性解析），日本建築学会論文報告集，第 224 号，昭和 49 年 10 月
10) 河村博之，新宅英之，江上妙子，任意形状をした弾性体の一応力解析法（その 1），日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和 52 年 10 月
11) 平居孝之，無限板法，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和 55 年9月
12) 河村博之，江上好子，任意形状をした弾性体の解析法，日本建築学会中国・九州支部研究報告，第4号，昭和 53 年2月
13) 河村博之，牧園恒彰，任意形状をした弾性体の境界応力弛緩法による応力解析法，日本建築学会中国・九州支部研究報告，第5号，昭和 56 年3月
14) 平居孝之，基本解の重ね合せによる二次元弾性問題の解法の検討，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和 56 年9月
15) 平居孝之，重ね合せによる二次元弾性問題の解法に関する考察，日本建築学会論文報告集，第 311 号，昭和 57 年1月
16) C.A. Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, 1978, Pentech Press（神谷紀生，田中正隆，田中喜久昭訳，境界要素法入門，昭和 55 年培風館）
17) C.A. Brebbia, S. Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, 1980, Butterworth & Co.（神谷紀生，田中正隆，田中喜久昭訳，境界要素法の基礎と応用，昭和 56 年，培風館）
18) Y.C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, 1965, Prentice-Hall（大橋義夫，村上澄男，神谷紀生訳，固体の力学／理論，昭和 45 年，培風風，p. 115）
19) 文献 16)，訳本 pp. 107～108
20) 文献 16)，訳本 pp. 133～134
21) 文献 16)，訳本 pp. 135～151
22) 小林昭一，西村直志，積分方程式法の解析精度の向上に関する考察，土木学会論文報告集，第 291 号，昭和 54 年 11 月
23) 石田　誠，き裂の弾性解析と応力払大係数，昭和 51 年，培風館

SYNOPSIS

UDC : 624.04 : 539.3

SOME CONSIDERATIONS ON INDIRECT AND DIRECT METHODS OF BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR TWO DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS

by Dr. **TAKAYUKI HIRAI**, Assoc. Prof. of Oita Univ., Member of A.I.J.

Not a few studies on Boundary Element Method have been reported to get the numerical solutions of elasticity problems. There are two kinds of Boundary Element Method named Indirect Method and Direct Method which based on each foundamental formula leaded from the superposition of principal solutions and the boundary integral equation respectively. In this paper the analytical formulas are presented for the integral values of the two dimensional elasticity principal solution along the boundary element on which the traction distributes constantly and the displacement distributes linearly.

Some Indirect and Direct Boundary Element Method programs for two dimensional elasticity problems, using the analytical formulas presented, are proposed and the usefulness of the method is examined by solving some representative problems.

The very accurate solution might be resulted by Direct Boundary Element Method using the element on which the displacement distributes by a dimension higher than the traction. Concerning with the proposed Direct Boundary Element Method, on which boundary element the displacement is linear and the traction is constant, solutions with reasonable precision are calculated on several problems but sometimes considerable errors in the results are indicated on the problems which boundary conditions are given by the traction and the displacement together.

All the solutions calculated by proposed Indirect Boundary Element Method on the analytical model on which enough number of boundary elements created have the gratifying exactitude.