UDC : 620.1 : 539.3

日本建築学会論文報告集
第311号・昭和57年1月

重ね合せによる二次元弾性問題の解法に関する考察

正会員 平 居 孝 之*

1 序

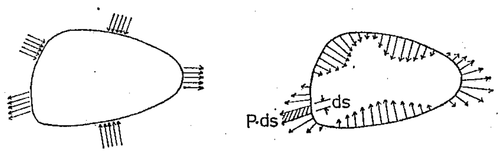
弾性問題は，既知の基本解を重ね合せて境界条件を再現することにより近似的に解くことが出来る。用いる基本解を適切に選定すれば，任意の形状をした問題に適用出来る可能性がある。大型計算機の発達により，一般に数値積分を伴う境界条件の再現のための多大の量の計算を意図した精度で行うことが可能になり，任意形状をした弾性問題に対して汎用性のある解法の開発が活発に試みられている。基本解が荷重の作用点を中心とする放射状分布をしているので，放射状応力場の重ね合せによる境界荷重問題の解法[1]，電子計算機による二次元応力問題の解法[2]，半無限平板の応力場を重ね合せる半無限板法[3]，境界に相当する部分の応力を弛緩して境界条件を満足させる境界応力弛緩法[4]，境界条件の再現を基本解の応力場に基づく積分方程式により行う境界積分方程式法[5]，周辺を有限個の線要素に分割し基本解を各要素において積分して境界条件を再現することから周辺積分有限要素法[6]，などと表現されている。重ね合せ法は次に述べる基本原理に基づいており，既知の基本解を境界条件が満たされるように重ね合せて，任意形状をした弾性問題を解く方法である。筆者も基本解を重ね合せて境界条件を再現する方法で任意形状をした二次元弾性問題の解法の開発を試みており，ここではこれまで行った考察について述べる。

2 従来の研究とその考察

2-1 基本原理

基本解の重ね合せによる任意形状の弾性問題の解法は，Ch. Massonnet により放射状応力場の重ね合せによる境界荷重問題の数値解法[1]としてその基本原理が示された。

図—1 の (a) のように境界荷重が与えられた平面問題を解くために，境界に仮想荷重が作用している図—1 の (b) の場合を考える。境界の微少部分 ds に作用している仮想荷重 $P \cdot ds$ によって生じる応力場として，無限縁上の1点に $P \cdot ds$ と同じ大きさの集中力が作用している半無限平板の応力場を用いる。境界のすべての仮想荷重により生じる応力場を重ね合せると，ある一つの応力場が得られる。この応力場が境界条件を再現しているとき解となる。



図—1 平面問題

Ch. Massonnet は，問題に与えられた境界荷重をそのまま仮想荷重とし，それらの仮想荷重が作用したときの応力場を重ね合せたときに，境界の位置に生じる応力と境界条件の差を再び仮想荷重とおいて計算を繰り返し，両者の差が十分に小さくなるまで計算を繰り返す方法で境界条件の再現を行っている。岸谷，筆者はこれと同様の考え方で，線分の要素で境界を近似したモデルを用いる解析プログラムを作成し報告している[3]。解ける問題の形状に制限があり，また繰り返し計算を必要としており，初歩的な解法であった。

Ch. Massonnet によって示された重ね合せによる弾性問題の解法は多くの可能性を含んでいる。多元連立1次方程式の利用，仮想境界の設定，基本解の拡張などの工夫により，境界条件が変位で与えられた場合，内部に切欠きを有する場合，厚さあるいは弾性定数の異なる部分が接合された場合，異なる部分が接触する場合，物体力が存在する場合，無限遠で均一応力場の与えられた無限平板の場合等への適用が考えられる。

2-2 多元連立一次方程式の利用

基本解を重ね合せて求めた応力場によって，問題に与えられた境界条件を再現するための数値計算は，問題の境界を有限個の要素に分割し，各要素で境界条件が近似的に満たされるように行われる。大型計算機が利用出来る現在では，境界の各要素に作用される仮想荷重を未知数とする多元連立次方程式を解くことにより，境界条件を再現することが可能で，繰り返し計算を省略することが出来る。

与えられた問題の境界を n 個の要素に分割し，第 i 番目の要素に作用させる仮想荷重を P_i とする。P_i により生じる第 j 番目の要素の応力を σ_{ji} とする。用いる基本解の種類と，i および j 番目の要素の位置関係によって決まる係数を N_{ji} とすると，σ_{ji} は P_i の一次式の形で (1) 式から求まる。

$$\sigma_{ji}=N_{ji} \cdot P_i \quad \cdots\cdots(1)$$

* 大分大学 助教授・工博
(昭和56年5月6日本稿受理・討論期限昭和57年4月末日)

すべての要素の仮想荷重により生じる j 番目の要素の応力を重ね合せた値が境界条件に等しいと置くことから (2) 式が得られる。

ここで σ_{j0} は，j 番目の要素の境界条件で与えられた応力である。

$$\sum_i N_{ji} \cdot P_i = \sigma_{j0} \quad \cdots\cdots(2)$$

仮想荷重の自由度と境界条件の自由度をそろえることにより，(2) 式で表される多元連立1次方程式の解が求まり，境界条件を再現する仮想荷重が定まる。境界条件が変位で与えられた要素については，基本解として変位場を用いることになる。仮想荷重の替りに仮想変位を未知数としても同じことである。

2-3　仮想境界の設定

厚さが異なる場合，また弾性定数の異なる部分が接合された問題は，同一条件の部分ごとにブロックに分割して解くことが出来る[6]。ブロックの接合部である仮想境界における境界条件は，仮想境界で接合された二つの要素の応力と変位が，それぞれつり合い条件と適合条件を満足することから与えられる。仮想境界上で厚さが a のブロック A の要素 s と，厚さが b のブロック B の要素 s' が接合されているとき，ブロック A に作用させる仮想荷重により要素 s に生じる応力を σ_A 変位を δ_A とし，ブロック B に作用さるる仮想荷重 s' により要素に生じる応力を σ_B 変位を δ_B とすると，つり合い条件は $\sigma_A \cdot a = \sigma_B \cdot b$ 適合条件は $\delta_A = \delta_B$ となる。異なる座標系を併用する場合は，座標変換が必要である。

仮想境界を設けてブロックに分割して解く方法は，同一厚さで同じ材質の場合でも，問題の形状によって仮想荷重を求めるための多元連立方程式の係数相互のデのメンジョンが大きくなる時の対策としても有効である。

2-4　基本解

基本解としては，無限平板あるいは半無限平板の1点に集中荷重が作用する場合が用いられており，またこれらを基礎式として，線分または曲線の一部に分布する荷重に拡張した場合が試みられている。

半無限平板の無限縁上の一点に集中荷重が作用した場合を基礎式とすると[1),3)]，式がきわめて簡明であり，無限縁上で荷重の作用していない部分は自由境界となるので，直線の自由境界を再現するのに好都合となるが，切欠きなどの境界を再現する場合に適用出来ない。先に述べた仮想境界を設ける方法であれば，簡単な形状の問題を半無限平板の無限縁上に荷重が作用する場合の基本解のみを重ね合せて解くことが可能であるが，一般に任意形状の問題を解くには，無限平板に荷重が作用した場合を基本式に含むことが必要になる[6),7)]。

平板の1点に集中荷重が作用する場合は，荷重の作用点が特異点となる。1点に作用する荷重は実在しないが，数値計算上1点に作用する荷重の作用点における応力と変形を取り扱う必要が生じる。荷重で与えられた境界条件を再現するための計算では，特異点回りの微少閉区間を積分することにより，要素に作用する合力として取り扱われている[6),7)]。

半無限平板の無限縁上でない1点に集中力が作用する場合の応力場が基本解として用いられている[2)]。このときの応力場は，無限平板に集中荷重が作用する場合と半無限平板の無限縁上に集中荷重が作用するときの積分値として導かれるので，両者を基礎式とする場合に帰着される。

モーメントが無限平板の1点に作用した場合の応力場も利用されている[7)]。基本解として用いる応力場は，境界に設定する各要素について直交2方向の荷重に応じて自由度を2とする場合がほとんどである。モーメントを応力場として加えると，自由度が3になる。周辺を n 個の要素に区切るときは，自由度2のとき $2n$，自由度3のとき $3n$ の元数の連立1次方程式を解くことになり，一般に周辺の要素を細かくして要素数を増やす方が，モーメントを加えて自由度を3とするより，計算機の容量による要素分割の限度と消費時間の点で有利である。

分布荷重への拡張では，半無限平板の無限縁上の一部に等分布荷重が作用する場合の応力場が用いられている[4)]。荷重作用部分の線分上の応力分布が両端を除いて一様になるので，境界条件が分布荷重として与えられた問題を解く場合の基本解として有効である。無限平板上の1つの線分に等分布荷重が作用する場合は，荷重作用部分の線分上の応力分布が一様とならないので，線分の中点の応力は利用されるが[2)]，中点を除く線分近傍の応力場を用いるのは疑問がある。

等分布の荷重に替えて，分布状態に重みを付けた荷重が無限縁上の一部に作用した半無限平板の応力場を用いることが試みられている[8)]。問題のコーナー部分に含まれる誤差が大きいため，半無限くさびの先端に荷重が作用した場合の応力場の利用が考えられている[9)]。コーナー部分や境界近傍の解の精度を上げる方法として，隣接する部分の精度の良い解から外挿または内挿により近似値を推定する方法が報告されている[6)]。

基本解として使われているものは，応力場に関するものが多いが，境界条件が変位で与えられている場合は変位場が必要になる。変位場としては，無限平板の一点に集中荷重が作用した場合が利用されている[6),10)]。

基本解の重ね合せによる境界条件の再現の精度と求めた解の精度は，用いる基本解によって異なるが，サンブナンの定理より[11)]，境界に設ける要素が小さくなる程良くなるといえる。したがって基本解の拡張は，境界の要素分割の限度と関連して検討する必要がある。要素分割の限度は，多元連立一次方程式を解く計算機の容量と根の精度の2点において考慮が必要になる。筆者の試行で

は，後に示す図—12 のように，500 元程度の連立 1 次方程式を有効数字 6~7 桁で解いた場合に満足な解が得られている。一方要素数が少ない場合でも，異種材質の接合問題でヤング係数の比を極端に大きく取った場合，対称性を有する問題で要素分割にも対称性を持たせた場合に，多元連立一次方程式の根に信頼性の得られない事例が生じている。

3　解法の有用性の検討

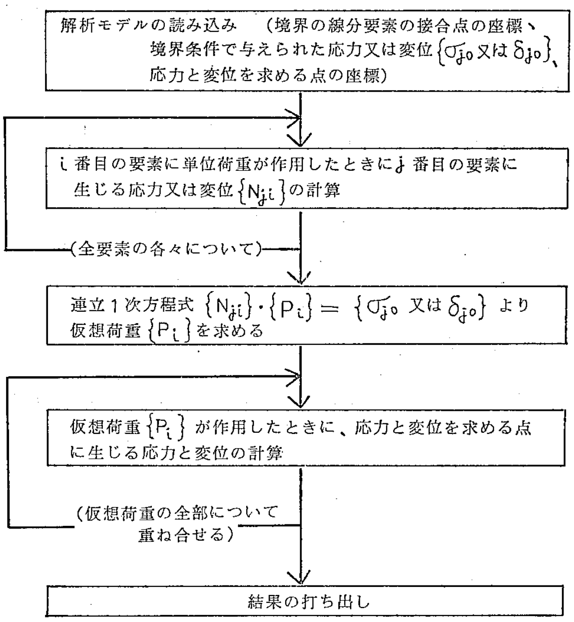
新しい解法の開発においては，その有用性を従来の解法と比較して検討しなければならない。また解の信頼性を実験により裏付けることが必要である。無限平板の一点に集中荷重が作用したときの応力場と変位場を基本解に用いた解法について，最近その有用性が明らかにされている[6),10)]。無限平板の 1 点に集中荷重が作用した場合を基本解とすると，境界条件が分布荷重で与えられた問題や仮想境界を必要とする問題で，境界の近傍における誤差が大きくなる[10)]。解の精度を上げるためには，先に述べたような方法があるが，なかでも境界条件が分布荷重で与えられた時の状態をより近似的に再現出来る基本解の利用を試みることが有望である。ここでは，分布荷重に対応させる基本解として，半無限平板の無限縁の 1 部に等分布荷重が作用したときの応力場と変位場に着目し，半無限平板の無限縁の 1 点に集中荷重が作用したときと，無限平板の 1 点に集中荷重が作用したときの応力場と変位場と組み合せて，任意形状の問題に利用出来る解析プログラムを作成し，例題に適用して，解法の有用性を検討した。

3-1　解析プログラム

任意形状の問題を対象とする場合は，用いる基本解に適した形状の解析モデルで近似することが必要になる。線分上に等分布する荷重と線分上の 1 点に集中して作用する荷重の応力場と変位場を基本解としているので，問題の周辺を線分の要素に分割し，多角形でモデル化する。

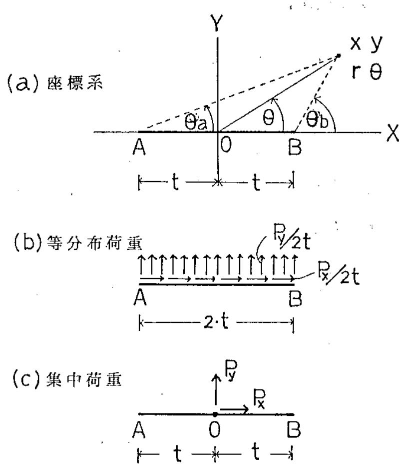
境界条件の再現は，各要素の中点において満たされることとした。解析プログラムのフローチャートを表—1 に示す。境界条件が荷重および変位で与えられている場合，異なる材質または厚さの平板が接合されている場合，無限遠で均一応力場となる無限平板に孔があいている場合について，任意形状の二次元弾性問題に適用出来る。

表—1　解析プログラムのフローチャート



3-2　応力場と変位場の基本解

図—2 の (a) のように，線分 AB で表された境界の要素に直交座標および極座標を設け，実体が右手にあるような線分 AB の方向を X 軸の正の方向とし，原点を線分 AB の中点に取る。荷重は，X 軸に平行な等分布荷重と Y 軸に平行な等分布荷重（図—2 の b），また X 軸あるいは Y 軸に平行で原点に作用する集中荷重（図—2 の c）とする。いずれも座標軸の正の方向を向くものを＋とする。以下において変位場は応力場から求めた歪を積分したものであり，平行移動と回転を表すことになる積分定数は，式が簡単な形になるように選んでいる。平板の厚さは 1 に取り，次の記号を用いる。



図—2　要素と座標

ν：ポアソン比　　E：ヤング係数

$$m=\frac{3+\nu}{4\cdot\pi} \qquad n=\frac{1-\nu}{4\cdot\pi}$$

$$\alpha=\frac{-2}{\pi\cdot E} \qquad \beta=\frac{2\cdot\nu}{\pi\cdot E}$$

以下では，平面応力状態を考えており，平面歪状態の場合は ν のかわりに $\nu/(1-\nu)$ とする。

a　無限平板の 1 点に集中力が作用するとき

集中力 P_X（図—2 の c）が作用したときの応力場は，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_X&=\{-m+(m-n)\cdot\sin^2\theta\}\cdot\frac{\cos\theta}{r}\cdot P_X\\ \sigma_Y&=\{n-(m-n)\cdot\sin^2\theta\}\cdot\frac{\cos\theta}{r}\cdot P_X\\ \tau_{XY}&=\{m-(m-n)\cdot\sin^2\theta\}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\cdot P_X\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(3)$$

変位場は

$$\delta_X=\frac{1}{4\pi E}\{(\nu-3)\cdot(\nu+1)\cdot\ln r$$

$$\left.\begin{aligned}&+(\nu+1)^2\cdot\cos^2\theta\}\cdot P_X\\ \delta_Y&=\frac{1}{4\pi E}(\nu+1)^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot P_X\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

集中力 P_Y (図―2 の c) の場合は，(3)，(4) 式の座標変換による。

これらの値は荷重の作用点において無限大となるため，荷重の作用点では，長さ $2t$ の線分要素の上で荷重が等分布していると考えた場合の原点の値を当てはめる。

集中力 P_X (図―2 の c) 作用点で

応力は，

$$\sigma_X=0,\ \sigma_Y=0,\ \tau_{XY}=-\frac{1}{4t}\cdot P_X\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

変位は，

$$\left.\begin{aligned}\delta_X&=\frac{1}{4\pi E}\{(\nu-3)\cdot(\nu+1)\cdot(\ln t-1)\\&\quad+(\nu+1)^2\}\cdot P_X\\ \delta_Y&=0\end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

集中力 P_Y (図―2 の c) の作用点で

応力は，

$$\sigma_X=\frac{\nu}{4\cdot t}P_Y,\ \sigma_Y=\frac{1}{4\cdot t}P_Y,\ \tau_{XY}=0\ \cdots\cdots(7)$$

変位は，

$$\delta_X=0,\ \delta_Y=\frac{1}{4\pi E}(\nu-3)\cdot(\nu+1)\cdot(\ln t-1)\cdot P_Y\ \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

b　半無限平板の無限縁上の 1 点に集中力が作用するとき，

集中力 P_X (図―2 の c) が作用したときの応力場は，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_X&=\frac{-2}{\pi}\ \frac{\cos^3\theta}{r}\cdot P_X\\ \sigma_Y&=\frac{-2}{\pi}\ \frac{\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{r}\cdot P_X\\ \tau_{XY}&=\frac{2}{\pi}\ \frac{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{r}\cdot P_X\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

変位場は，

$$\left.\begin{aligned}\delta_X&=\left\{\alpha\cdot\ln r+\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\theta\right\}\cdot P_X\\ \delta_Y&=\left\{\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\alpha-\beta}{2}\right.\\&\quad\left.\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\right\}\cdot P_X\ \ (-\pi\leqq\theta\leqq 0)\end{aligned}\right\}\cdots(10)$$

集中力 P_Y (図―2 の c) が作用したときの応力場は，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_X&=\frac{-2}{\pi}\cdot\frac{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{r}\cdot P_Y\\ \sigma_Y&=\frac{-2}{\pi}\cdot\frac{\sin^3\theta}{r}\cdot P_Y\\ \tau_{XY}&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{r}\cdot P_Y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(11)$$

変位場は，

$$\left.\begin{aligned}\delta_X&=\left\{\frac{-(\alpha+\beta)}{2}\cdot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\right\}\cdot P_Y\\&\qquad(-\pi\leqq\theta\leqq 0)\\ \delta_Y&=\left\{\alpha\cdot\ln r+\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos^2\theta\right\}\cdot P_Y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(12)$$

荷重の作用点では，長さ $2\cdot t$ の線分要素上で荷重が等分布していると考えた場合の値を当てはめる。

集中力 P_X (図―2 の c) の作用点で

応力は，

$$\sigma_X=0,\ \sigma_Y=0,\ \tau_{XY}=\frac{-1}{2\cdot t}\cdot P_X\ \cdots\cdots\cdots(13)$$

変位は，

$$\delta_X=\alpha\cdot(\ln t-1)\cdot P_X,\ \delta_Y=0\cdots\cdots\cdots(14)$$

集中力 P_Y (図―2 の c) の作用点で

応力は，

$$\sigma_X=\frac{1}{2\cdot t}\cdot P_Y,\ \sigma_Y=\frac{1}{2\cdot t}\cdot P_Y,\ \tau_{XY}=0\cdots(15)$$

変位は，

$$\delta_X=0,\ \delta_Y=\left(\alpha\cdot\ln t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot P_Y\cdots\cdots(16)$$

c　半無限平板の無限縁上の一部に等分布荷重が作用するとき，

(9)～(12) 式を積分して求められる。

等分布荷重 $\frac{1}{2\cdot t}\cdot P_X$ (図―2 の b) が作用したときの応力場は，

$Y\fallingdotseq 0$;

$$\left.\begin{aligned}\sigma_X&=\frac{1}{\pi t}\left\{-\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{\sin\theta_a}\right|-\frac{1}{4}(\cos 2\theta_b-\cos 2\theta_a)\right\}\cdot P_X\\ \sigma_Y&=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{1}{4}(\cos 2\theta_b-\cos 2\theta_a)\cdot P_X\\ \tau_{XY}&=\frac{1}{\pi t}\left\{\frac{1}{2}(\theta_b-\theta_a)+\frac{1}{4}(\sin 2\theta_b-\sin 2\theta_a)\right\}\cdot P_X\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

$Y=0$; $|X|\fallingdotseq t$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_X&=-\frac{1}{\pi t}\ln\left|\frac{X+t}{X-t}\right|\cdot P_X,\ \sigma_Y=0\\ \tau_{XY}&=-\frac{1}{2t}P_X\ \ (|X|<t),\ \tau_{XY}=0\ \ (|X|>t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

変位場は，

$Y\fallingdotseq 0$;

$$\left.\begin{aligned}\delta_X&=\frac{Y}{2t}\left\{\alpha\left(\cot\theta_b\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{Y}\right|-\cot\theta_a\ln\left|\frac{\sin\theta_a}{Y}\right|\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\cot\theta_b-\cot\theta_a\right)+\frac{3\alpha-\beta}{2}(\theta_b-\theta_a)\right\}\cdot P_X\\ \delta_Y&=\frac{Y}{2t}\left[-\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{\left(\theta_b+\frac{\pi}{2}\right)\cot\theta_b\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\left(\theta_a+\frac{\pi}{2}\right)\cot\theta_a\right\}+\beta\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{\sin\theta_a}\right|\right]\cdot P_X\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

$Y=0$; $|X|\fallingdotseq t$

$$\left.\begin{aligned}\delta_X&=\frac{\alpha}{2t}\{(t-X)\ln|t-X|\\&\quad+(t+X)\cdot\ln|t+X|-2\cdot t\}\cdot P_X\\ \delta_Y&=-\frac{\pi(\alpha+\beta)}{4}\cdot P_X\ \ (X<-t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(20)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_Y &= \frac{\pi(\alpha+\beta)}{4}\cdot\frac{X}{t}\cdot P_X \quad (-t<X<t) \\
\delta_Y &= \frac{\pi(\alpha+\beta)}{4}\cdot P_X \quad (t<X)
\end{aligned}\right|
$$

等分布荷重 $\frac{1}{2t}\cdot P_Y$（図—2 の b）が作用したときの応力場は，

$Y \neq 0$；

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_X &= \frac{1}{\pi t}\left\{\frac{-(\theta_b-\theta_a)}{2}-\frac{1}{4}(\sin 2\theta_b-\sin 2\theta_a)\right\}\cdot P_Y \\
\sigma_Y &= \frac{1}{\pi t}\left\{\frac{-(\theta_b-\theta_a)}{2}+\frac{1}{4}(\sin 2\theta_b-\sin 2\theta_a)\right\}\cdot P_Y \\
\tau_{XY} &= \frac{1}{\pi t}\left\{-\frac{1}{4}(\cos 2\theta_b-\cos 2\theta_a)\right\}\cdot P_Y
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (21)
$$

$Y=0$；$|X| \neq t$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_X &= \frac{1}{2t}P_Y \;\; (|X|<t),\;\; \sigma_X=0 \;\; (t<|X|) \\
\sigma_Y &= \frac{1}{2t}P_Y \;\; (|X|<t),\;\; \sigma_Y=0 \;\; (t<|X|) \\
\tau_{XY} &= 0
\end{aligned}\right\} \cdots (22)
$$

変位場は，

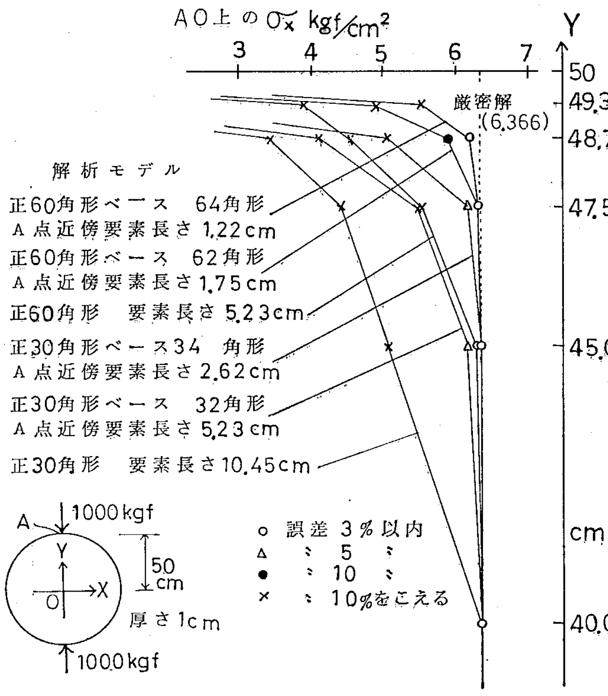
$Y \neq 0$；

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_X &= \frac{Y}{2t}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{\left(\theta_b+\frac{\pi}{2}\right)\cot\theta_b -\left(\theta_a+\frac{\pi}{2}\right)\cot\theta_a\right\}-\alpha\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{\sin\theta_a}\right|\right]\cdot P_Y \\
&\qquad (-\pi \leqq \theta \leqq 0) \\
\delta_Y &= \frac{Y}{2t}\left\{\alpha\left(\cot\theta_b\ln\left|\frac{\sin\theta_b}{Y}\right|-\cot\theta_a\ln\left|\frac{\sin\theta_a}{Y}\right|\right) +\frac{\alpha+\beta}{2}(\cot\theta_b-\cot\theta_a+\theta_b-\theta_a)\right\}\cdot P_Y
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (23)
$$

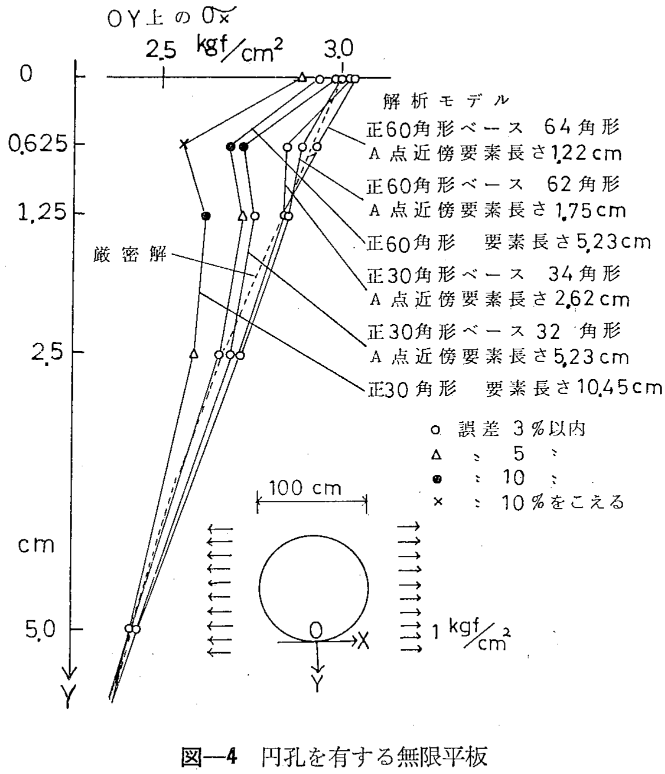
$Y=0$；$|X| \neq t$

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_X &= \frac{\pi(\alpha+\beta)}{4}\cdot P_Y \quad (X<-t) \\
\delta_X &= \frac{-\pi(\alpha+\beta)}{4}\cdot\frac{X}{t}\cdot P_Y \quad (-t<X<t) \\
\delta_X &= \frac{-\pi(\alpha+\beta)}{4}\cdot P_Y \quad (t<X) \\
\delta_Y &= \left[\frac{\alpha}{2t}\{(t-X)\ln|t-X| +(t+X)\ln|t+X|\}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cdot P_Y
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (24)
$$

これらはいずれも $Y=0$, $X=|t|$ すなわち線分要素の両端において数値を持たない。このため応力または変位を求めたい点が $Y=0$, $X=|t|$ となる場合は，$Y=\frac{-t}{10}$ における値で代用する。境界条件の再現では，線分の中点における応力または変位を用いるので問題は生じない。(13)～(16) 式は (18)，(20)，(22)，(24) 式に含まれる。(17)～(24) 式の値は，荷重が作用している所から離れた部分で (9)～(12) 式の値に近づくので，両者の差異が許容値以内にある区域では (17)～(24) 式の替りに (9)～(12) 式を用いてもよい。



図—3 集中荷重を受ける円板



図—4 円孔を有する無限平板

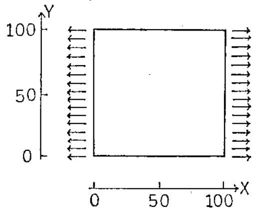
以上に示した (3)～(24) 式において，(3)～(9)，(11)，(13)，(15)，(17)，(18)，(21)，(22) は異なる表現であるがすでに利用されているものである[1)~10)]。筆者が追加した式は，(10)，(12)，(14)，(16)，(19)，(20)，(23)，(24) 式である。配慮した点は，平行移動と回転を与える積分定数の値である。

3-3　解析モデルと解の精度

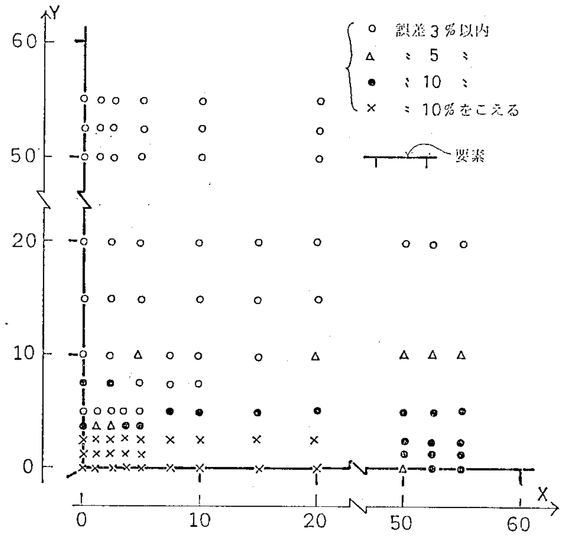
図—3 は，円板の 1 つの直径の両端で互いに向い合った 1 対の集中荷重が作用した問題を，半無限平板の無限縁の 1 点に集中荷重が作用したときの応力場 (9)，(11)，

(13)，(15) 式を基本解として解いた結果である。正 30 角形または正 60 角形で問題をモデル化しており，A点の近傍の要素を細分化した時のモデルと比較してある。厳密解との誤差は境界に近い部分で生じており，要素を小さくすると精度が高められる。要素の長さを l とすると，その要素から l 以上離れている部分の精度は良い。同じことが図—4 にも示される。図—4 は，円孔を有する無限平板が無限遠において一様な引張応力を受けている場合を，無限平板の1点に集中荷重が作用した時の応力場 (3)，(5)，(7) 式を用い，図—3 で示したのと同じ多角形の孔でモデル化して解いた結果である。

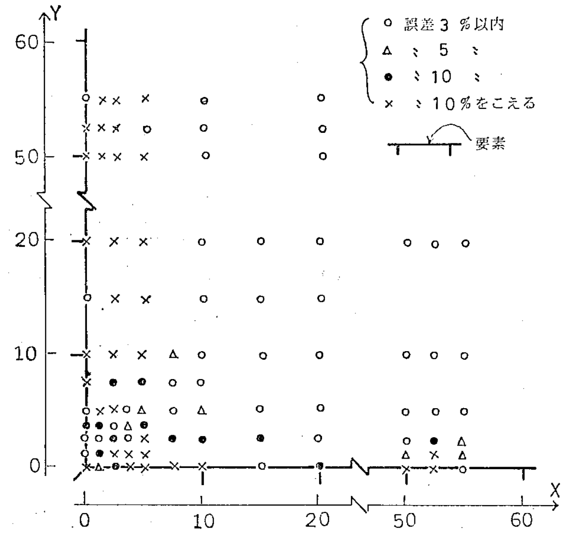
図—5 は，正方形平板の1組の向い合った辺に垂直な等分布荷重が作用した場合である。半無限平板の無限縁の一部に等分布荷重が作用したときの応力場 (17)，(18)，(21)，(22) 式を基本解として，1辺を 10 等分した要素を各辺に設けたモデルについて解いた結果の精度は図—6 である。載荷された境界の側の精度は良好であるが，自由境界の近傍では誤差が大きい。同じモデルについて，半無限平板の無限縁の1点に集中荷重が作用したときの応力場 (9)，(11)，(13)，(15) 式を基本解として解くと，精度は図—7 になる。分布荷重が与えられた境界の近傍の精度は落ちるが，自由境直の側では図—6 に比べて精度が良い。



図—5 単軸引張を受ける正方形板



図—6 等分布荷重の応力場を用いた場合



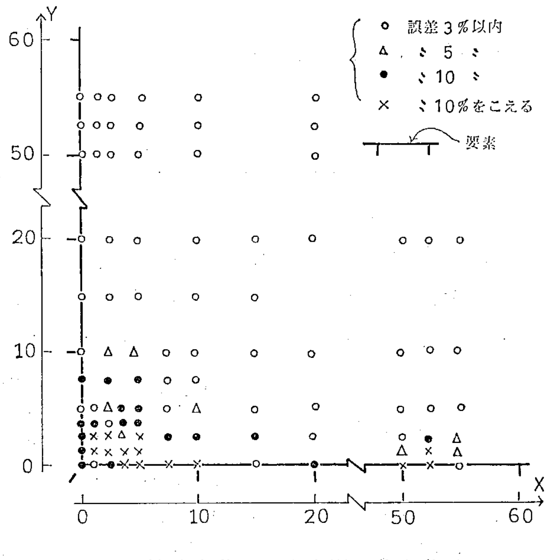
図—7 集中荷重の応力場を用いた場合

集中荷重が作用した場合の基本解と等分布荷重が作用した場合の基本解を組み合せることで，解の精度の向上を試みることが考えられる。両者の組み合せを種々変えたところでは，境界条件を再現するのに必要な仮想荷重を導くには集中荷重が作用する場合を，自由境界上の仮想荷重による応力場には集中荷重が作用する場合を，分布荷重が与えられた境界上の仮想荷重による応力場には等分布荷重が作用する場合を，それぞれ基本解に用いたときの精度が良く，図—5 の問題に適用したときの解の精度は図—8 のようになる。分布荷重の与えられた境界と自由境界のいずれにおいても精度が良い。コーナー部分では，一様な引張応力の作用する図—5 の場合は図—9 のように要素を細分化することにより精度が向上しているが，等分布せん断荷重が与えられた場合は，図—10 のように要素を小さくしてもそれに応じて精度の悪い部分が小さくならない。

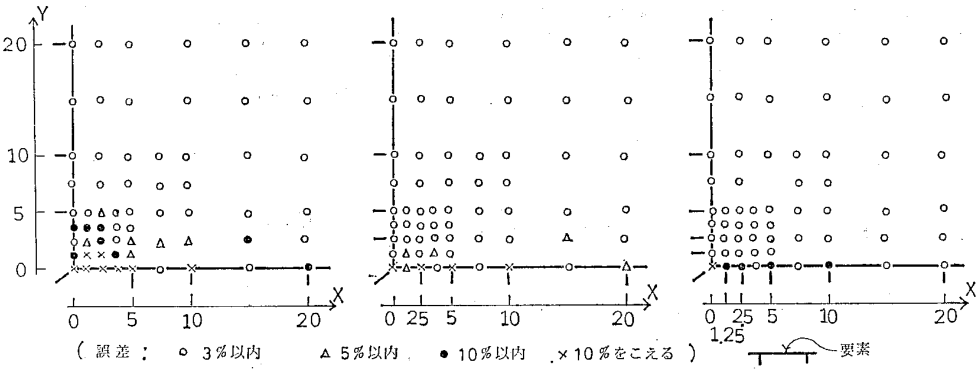
変位場を重ね合せたときの精度は，変位場が応力場の積分値であるから，応力場を重ね合せたときの精度より良いと考えられるが，仮想荷重を求めるための多元連立1次方程式の係数として使うには検討を要する。この点については次の機会に譲る。

3-4 例題

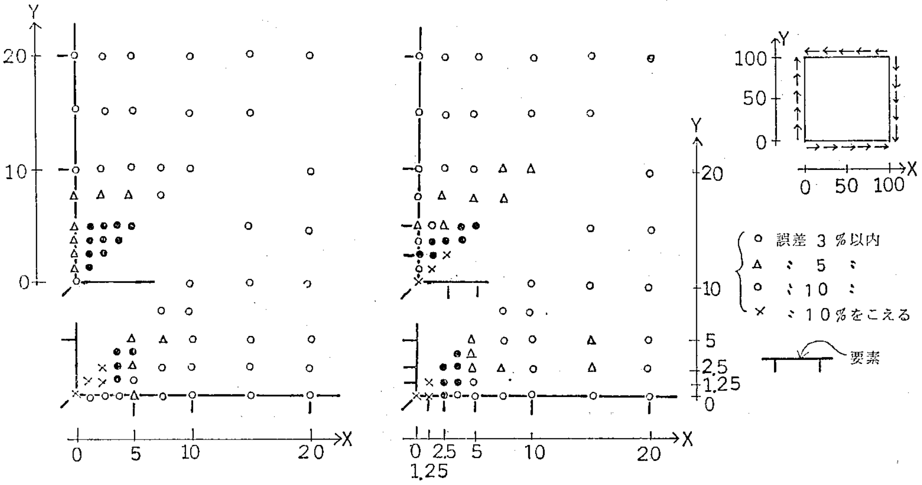
図—11 は，せん断荷重が作用した鉄筋コンクリートラーメン付壁板であり，すでに解が報告されている[12]。これを図—12 のように隅部と他の部分との境界に均一



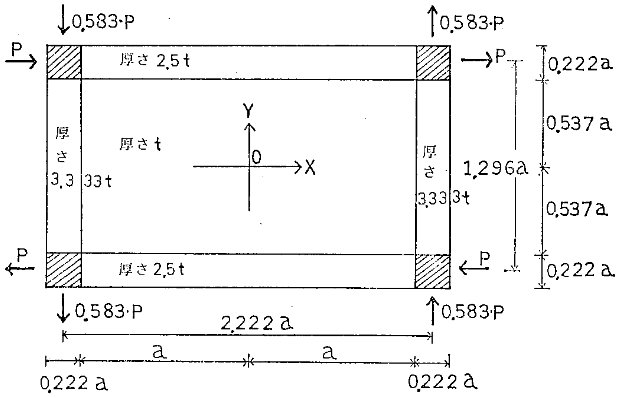
図—8 等分布荷重の応力場と集中荷重の応力場を組み合せた場合



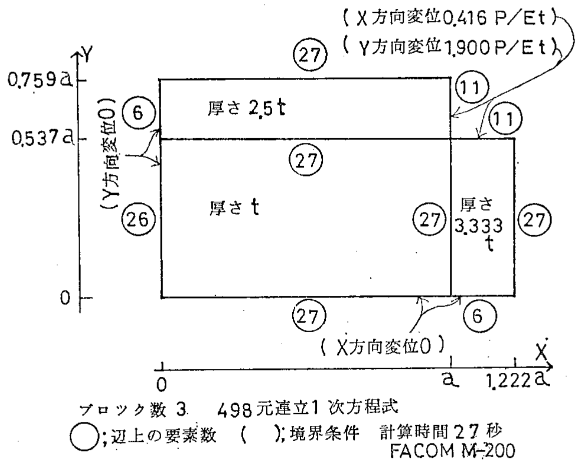
図―9 コーナー部分の要素細分割



図―10 コーナー部分の精度



図―11 ＲＣラーメン付壁板

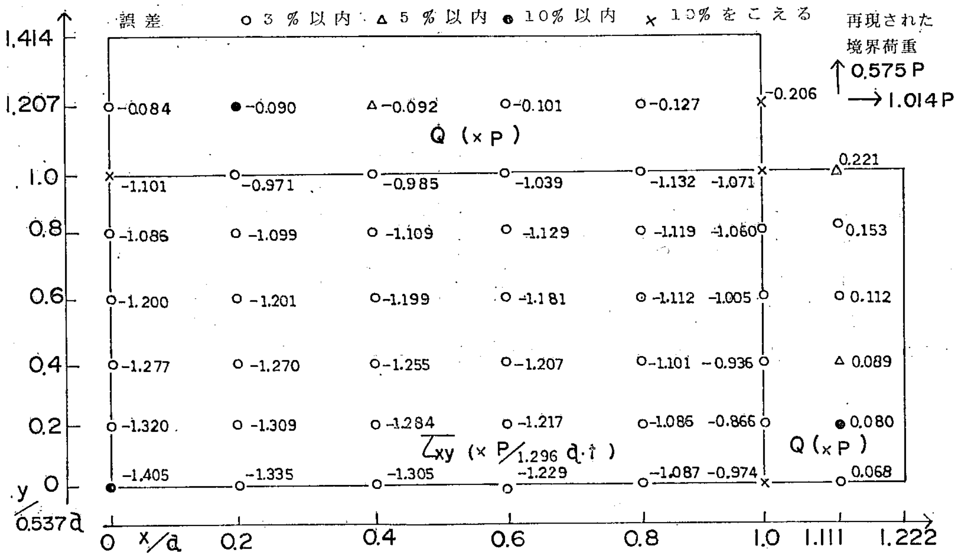


図―12 解析モデル

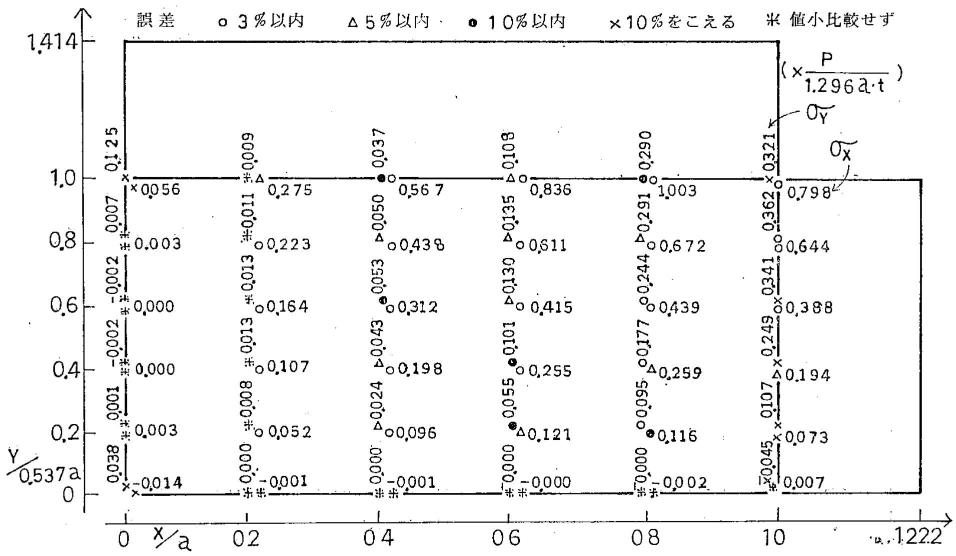
の変位を与えてモデル化し，半無限平板の無限縁の一部に等分布荷重が作用する場合と無限縁の１点に集中荷重が作用する場合の応力場と変位場を基本解に用い，ブロックに分割する方法で解いた。図―13～16 が計算結果の変位と応力および再現された境界条件である。報告されている解[12]との誤差を各数値に印を付けて表してある。端部における誤差は大きいが，全体において良い近似を示している。入力データは，境界上に連続して設けた線分要素の接合点の座標と境界条件が大部分であり，作成に要する時間は２時間程度である。

図―17 は，正方形の孔を有する無限平板に無限遠で均一なせん断応力が作用している問題の計算結果である。報告されている解[13]と近似している。このような問題は，孔をモデル化するために設定した線分要素の接合点の座標と，無限遠における均一応力場の数値を与えることにより解が求まる。

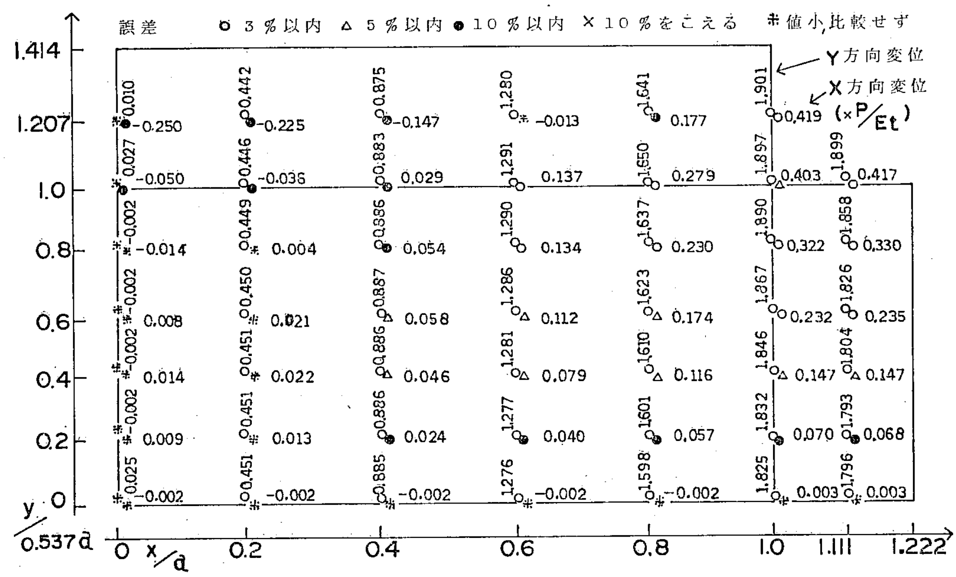
図―18 は，逆対称載荷された長方形板の応力を計算した結果である。定ひずみ三角形要素の有限要素法により要素分割を二通りにしたときのモデルについての計算結果と比較してある。重ね合せ法による計算結果では，図―18 の点線で示した中央載荷点を結ぶ線分近傍の最大主応力度が均一に近い分布となっており，いわゆる割裂引張の応力状態に類似している。モルタル供試体を用いて図―18 と同じ載荷方法で強度試験を行うと，図―18 の中央の載荷点を結ぶ点線の部分で破断する。重ね合せ法により計算した図―18 の点線の中央の最大主応力度を用いて，破断時の荷重からモルタルの強度を計算すると表―2 になる。表―2 には，同時に成形した直径 5 cm のモルタルシリンダー供試体を用いた場合の割裂引張強度（図―3 の載荷状態にあたる）[14] が示されており，両者は似た値となっている。基本解を重ね合せる方法は，モルタルやコンクリートの静的強度試験における供試体の応力を解析するうえで有効な方法である。有限要素法の場合，図―18 のような要素分割の粗さでは，応力分布を的確に知るうえで十分といえず，また要素分割のパターンが異なると計算結果に大きな差が生じている。これらのモデルは，節点数をほぼ同じにしてあり，どちらの解法も節点数の２倍の元数の連立方程式を解いてい



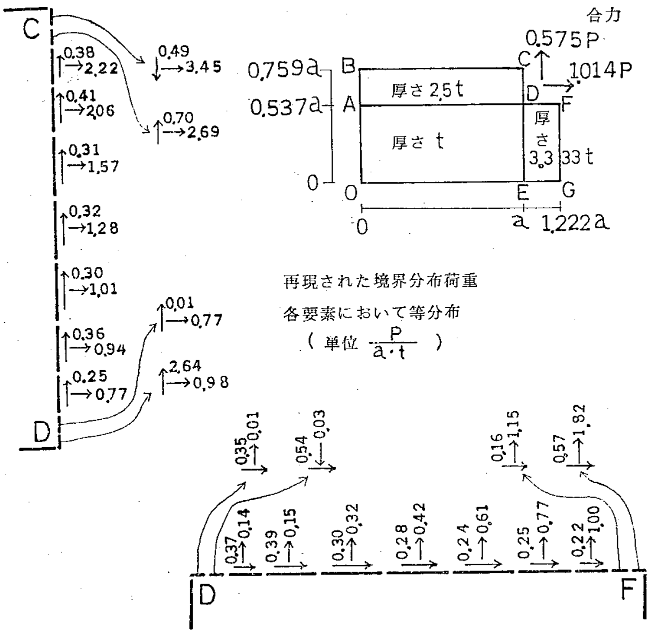
図—13 壁板のせん断応力度とラーメンのせん断力



図—14 垂直応力度



図—15 変 位

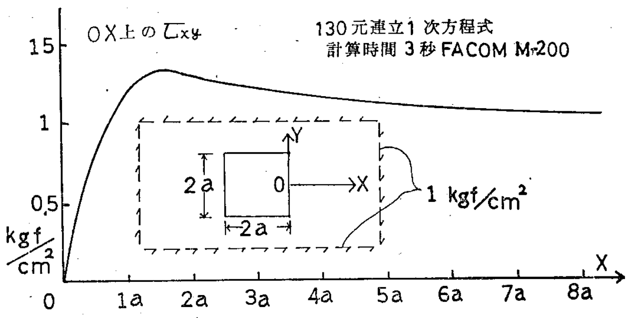


図—16 再現された境界条件

表—2 逆対称載荷と割裂引張によるモルタルの強度

モルタルの調合	圧縮強度（参考）	逆対称載荷強度	割裂引張強度
A	264	31	34
B	239	38	36
C	233	29	30
D	228	27	29
E	192	21	25
F	189	25	28
G	164	22	22
H	142	21	22
I	109	16	18

（Kgf/cm²）



図—17 正方形孔を有する無限平板

る。計算時間は，重ね合せによる方法がやや長く必要とする。入力データは，要素に対応する節点番号を必要とする有限要素法において多く，重ね合せによる方法では少ない。

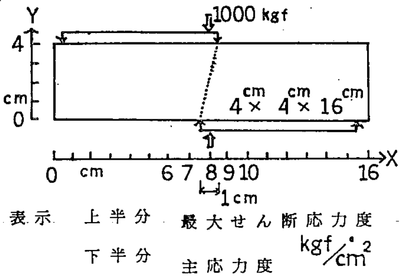
4 結　　論

基本解を重ね合せて境界条件を再現することにより任意形状をした二次元弾性問題を解く方法について，これまで用いられてきた基本解にさらにいくつかの基本解を組み合せて解析プログラムを作成し，二三の問題に適用してその有用性の検討を行い，次のような知見を得た。

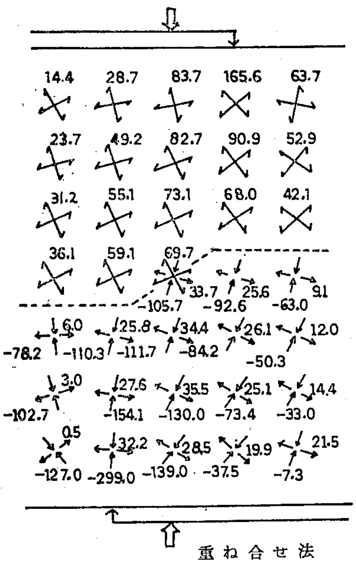
境界条件を再現するのに必要な仮想荷重の算定においては，多元連立1次方程式を用いることが有効であり，繰り返し計算を必要とせず，精度を向上するために境界に設ける要素分割を小さくして連立1次方程式の元数が大きくなる場合でも解を求めることが可能であった。

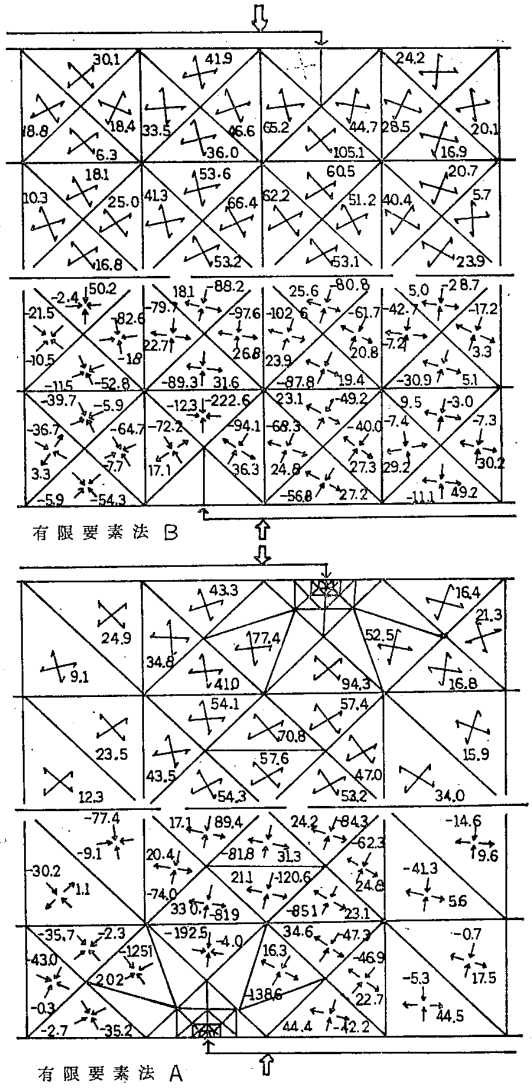
集中荷重が作用した場合の基本解と等分布荷重が作用した場合の基本解を組み合せ，自由境界と集中荷重または分布荷重の与えられた境界に応じて使いわけることで境界近傍の解の精度が向上した。

境界条件が荷重と変位のいずれで与えられた問題でも解くことが



	重ね合せ法	有限要素法 A	有限要素法 B
要素数	96	158	152
節点数	96	99	99
入力データワード数	600	1250	1180
計算時間	11秒	9秒	9秒





図—18 逆対称載荷された長方形板

出来た。

仮想境界を設けて問題をブロックに分割することにより，厚さと材質の異なる部分が接合された問題に適用することは有効であった。

無限遠で均一応力場となる無限平板に孔が存在する問題を取り扱うことが出来た。

解の精度は，境界をモデル化する要素の設定条件によって調節することが可能で，誤差を 3～5% 以内に納めることが出来ると推察されたが，問題のコーナー部分における精度の向上は困難であった。

解析モデルのデータは，主として境界に設ける要素の接合点の座標と境界条件であり，短時間で容易に作成された。

5 むすび

基本解の重ね合せによる二次元弾性問題の解法について，従来報告されている基本解にいくつかの新たな基本解を導入して作成した解析プログラムにより，境界条件が荷重および変位で与えられた場合，異種材料が接合された場合，無限平板に孔が存在する場合に，任意形状をした問題の近似解が得られることを示した。

文献

1) Ch. Massonnet, Numerical Solution of Edge-Load Problems by Superposition of Radial Stress Systems, Handbook of Engineering Mechanics, pp. 37-1～37-30 McGRAW-HILL 1 th Ed. 1962
2) 西谷弘信，電子計算機による二次元応力問題の解法，日本機械学会誌，第70巻 第580号，昭和42年5月，627頁～635頁
3) 岸谷孝一，平居孝之，コンクリートの割裂引張試験に関する考察，日本建築学会論文報告集第224号，昭和49年10月
4) 河村博之，新宅英之，江上妙子，任意形状をした弾性体の一応力解析法（その1），日本建築学会大会学術講演梗概集 昭和52年10月
5) 登坂宣好，境界積分方程式法の適用について，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和52年10月
6) 蔦 紀夫，山地成一，周辺積分有限要素法とその応用，日本機械学会論文集，A編，46巻412号，1421頁～1430頁，昭和55年12月
7) 平居孝之，無限板法，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和55年9月
8) 河村博之，江上好子，任意形状をした弾性体の解析法，日本建築学会中国・九州支部研究報告，第4号 昭和53年2月
9) 河村博之，牧園恒彰，任意形状をした弾性体の境界応力弛緩法による応力解析法，日本建築学会中国・九州支部研究報告，第5号 昭和56年3月
10) C.A. Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, p. 135, 1978
11) S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd Ed. p. 39 McGRAW-HILL
12) 富井政英，平石久広，Elastic Analysis of Framed Shear Walls by Considering Shearing Deformation of the Beams and Columns of Their Boundary Frames, Part Ⅲ，日本建築学会論文報告集 第275号 昭和54年1月
13) 瀬谷 胖，松井源吾，開口のある耐震壁の応力と変形に関する研究，日本建築学会論文報告集，昭和54年12月
14) コンクリートの引張強度試験方法，JIS A 1113

SYNOPSIS

UDC : 620.1 : 539.3

SOME CONSIDERATIONS ON NUMERICAL SOLUTION OF TWO DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS BY SUPERPOSITON OF ELEMENTARY SOLUTIONS

by Dr. **TAKAYUKI HIRAI**, Associate Professor of Oita Univ.,
Member of A.I.J.

Arbitrary shaped two dimensional elasticity problems are possible to be solved by superpositing some elementary solutions to satisfy the boundary conditions. As the electric computer advanced, the numerical process on satisfying the boundary conditions might be carried out with the required precision, and the solutions have the possibility to get the desirable accuracy. Recently not a few studies on the method for arbitrary shaped elasticity problems based on the principle of superposition were reported.

In this paper the author tried to adopt some elementary solutions to go with the ones that have been reported already, and the usefulness of the method is examined by an original program. Arbitrary shaped two dimensional elasticity problems which boundary conditions are given by stresses or deformations, which is composed of several portions of different materials, and infinite elastic plate having arbitrary shaped hole under the action of an uniform load in the infinite distance are solved. On the numerical process to superpose the elementaly solutions, plural simultaneous equations are effective to reproduce the boundary conditions. The exactitude of the solution is increased by adopting several elementaly solutions in conbination with the boundary conditions. It is conjectured that the error becomes within 5 percent by the program presented except the corner of the problem. There still remains the insufficient exactitude of the solution in the corner of the problem, but the superposition of the elementary solutions is useful on arbitrary shaped two dimensional elasticity problems.