

無 限 板 法

正 会 員 平 居 孝 之

1 序

工学上の問題を取り扱う場合に、応力解析方法としての近似解法は、解析手順が容易であり、広範囲の問題に適用できることが望まれる。この意味で有限要素法は、きわめてすぐれた方法である。しかし有限要素法では、それぞれの要素における応力と歪が均一であるから、解析結果の精度を上げるために、要素分割を細かくする必要があり、解析モデルの設定に多大の労力を要し、かつ十分な精度の得られない場合がある。このため筆者は、静定の平面弾性問題をすべて解くことの出来る近似解法を開発したので、これを無限板法 (Infinite Plate Method) と名付けて報告する。なお、今回発表する無限板法に比べると、解くことのできる問題の範囲が狭い応力解析の近似解法を、半無限板法と名付けて、すでに報告している¹⁾。

2 無限板法の基本過程

図1-①のように、外力が作用して釣り合っている単位厚さの弾性体平板の内部応力を例にする。ここで弾性体平板の内部に切り欠きの部分がある場合も、また作用している外力がモーメントである場合も、以下の説明は同じである。この図1-①の問題を、図1-②に示す単位厚さの弾性体多角形平板で近似する。弾性体無限平板の1点に集中力あるいはモーメントが作用している場合の応力は、図2のように求められる。図1-②の外力のそれぞれについて、それらと同じ外力が作用している弾性体無限平板から、図1-②と同じ形状の多角形を切り取り、図1-③~⑤のように、切り取った後でも多角形平板の応力が変化しないように、切断面に仮定の外力を作用させる。これらを重ね合わせると、図1-⑦のように、与えられた外力と仮定の外力が作用した状態の弾性体多角形平板の内部の応力が計算される。次に、切断面に作用させた仮定の外力を打ち消す外力を、図1-⑥のように弾性体多角形平板に作用させる。この外力の切断面に垂直方向の成分の平均値を、応力のフィルターと名付ける。図1-⑥の仮定外力を打ち消す外力を、応力のフィルター図1-⑧と、残りの成分の図1-⑨に分ける。残りの成分の図1-⑨を、図1-⑩のように適切な集中力とモーメントで近似させると、それは

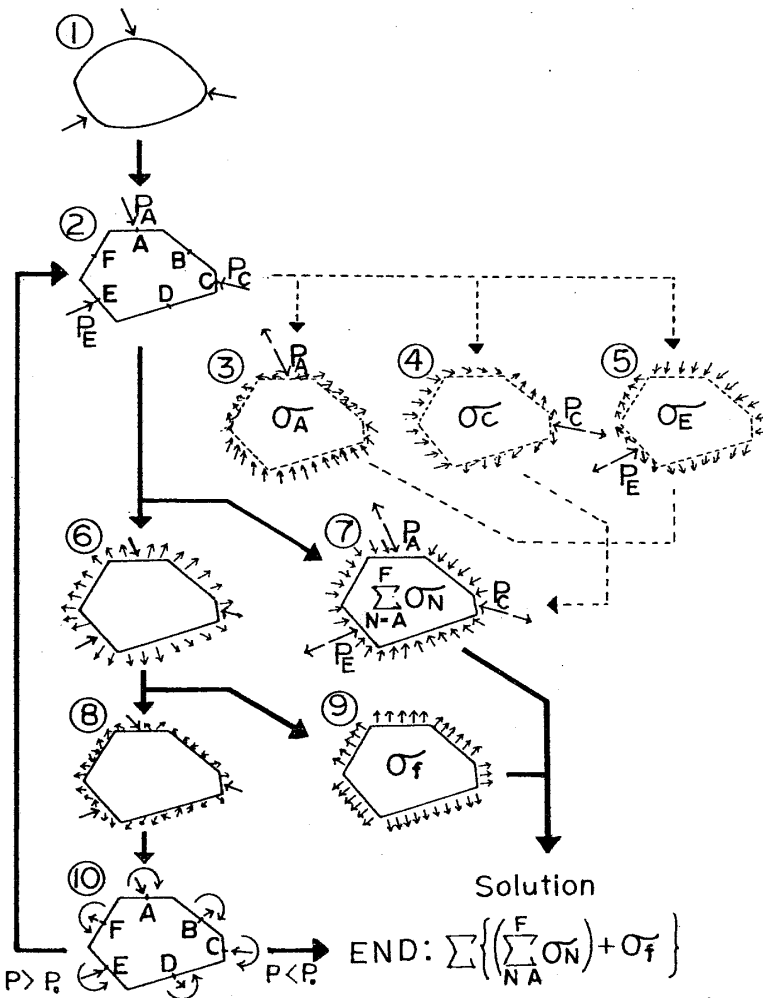


図 1 無限板法の基本過程

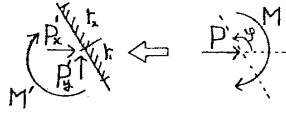
それぞれについて、それらと同じ外力が作用している弾性体無限平板から、図1-②と同じ形状の多角形を切り取り、図1-③~⑤のように、切り取った後でも多角形平板の応力が変化しないように、切断面に仮定の外力を作用させる。これらを重ね合わせると、図1-⑦のように、与えられた外力と仮定の外力が作用した状態の弾性体多角形平板の内部の応力が計算される。次に、切断面に作用させた仮定の外力を打ち消す外力を、図1-⑥のように弾性体多角形平板に作用させる。この外力の切断面に垂直方向の成分の平均値を、応力のフィルターと名付ける。図1-⑥の仮定外力を打ち消す外力を、応力のフィルター図1-⑧と、残りの成分の図1-⑨に分ける。残りの成分の図1-⑨を、図1-⑩のように適切な集中力とモーメントで近似させると、それは

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -\frac{3+\nu}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} \cdot P & \sigma_r &= 0 \\
 \sigma_\theta &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} \cdot P & \sigma_\theta &= 0 \\
 \tau_{r\theta} &= -\frac{1-\nu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cdot P & \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot M
 \end{aligned}$$

集中力 P が作用 モーメント M が作用

図 2 単位厚さの弾性体無限平板内部の応力

表 1 切断面に分布する仮想外力を集中力とモーメントに置き替える計算式



外力の作用点を含む
切断面

$$P'_x = -\frac{1}{2} P$$

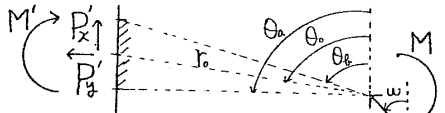
$$-\frac{M}{2\pi} \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$P'_y = \frac{1-\nu}{4\pi} \cdot P \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$

$$-\frac{M}{2\pi} \cdot \sin \varphi \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$M' = -\frac{1-\nu}{4\pi} \cdot P \cdot \cos \varphi \cdot (r_1 + r_2)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot M$$



外力の作用点を含まない切断面

ν : ポアソン比

$$M' = \frac{P}{8\pi} \cdot r_0 \cdot \left[\cos \omega \left[\sin \theta_0 \{-4(\theta_2 - \theta_1) - (1+\nu)(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) - 2(1-\nu) \cdot \log \left| \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right| \} \right] \right.$$

$$+ \cos \theta_0 \{- (1+\nu)(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) - 2(1-\nu) \cdot \log \left| \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right| \} - \sin \omega \cdot \left[\sin \theta_0 \{- (1+\nu)(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) \right.$$

$$+ 2(1-\nu) \cdot \log \left| \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right| \} + \cos \theta_0 \cdot \{-4(\theta_2 - \theta_1) + (1+\nu)(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\} \left. \right]$$

$$+ \frac{M}{8\pi} \cdot \{4(\theta_2 - \theta_1) + 2(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) + 2 \cdot \cot \theta_0 \cdot (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1)\}$$

$\theta_0, \theta_1, \theta_2 = 0$ 又は π のときは、 $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$ 又は π における極限值とする。

$$P'_x = \frac{P}{8\pi} \left[\cos \omega \{4(\theta_2 - \theta_1) + (1+\nu)(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\} \right.$$

$$+ \sin \omega \{- (1+\nu)(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) + 2(1-\nu) \cdot \log \left| \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right| \} \left. \right]$$

$$+ \frac{M}{8\pi} \cdot \frac{2}{r_0 \sin \theta_0} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)$$

$$P'_y = \frac{P}{8\pi} \left[\cos \omega \{- (1+\nu)(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) - 2(1-\nu) \cdot \log \left| \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right| \} \right.$$

$$+ \sin \omega \{4(\theta_2 - \theta_1) - (1+\nu)(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\} \left. \right]$$

$$+ \frac{M}{8\pi} \cdot \frac{2}{r_0 \sin \theta_0} (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1)$$

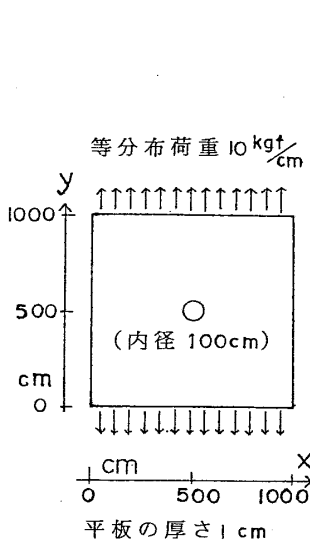


図 3

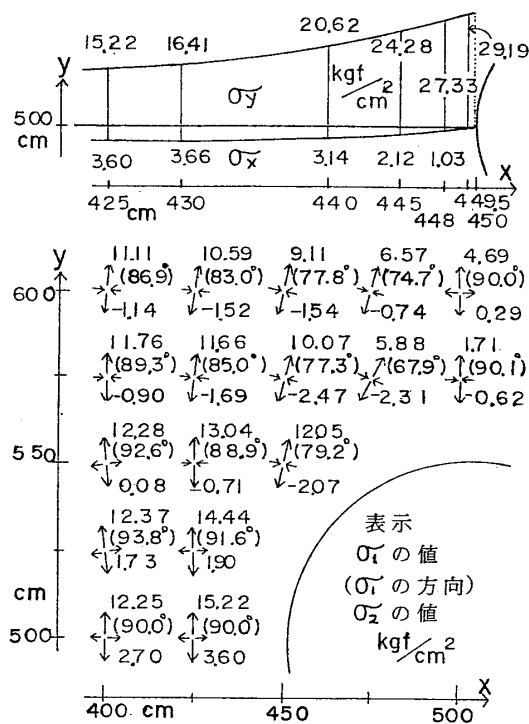


図 4 無限板法による

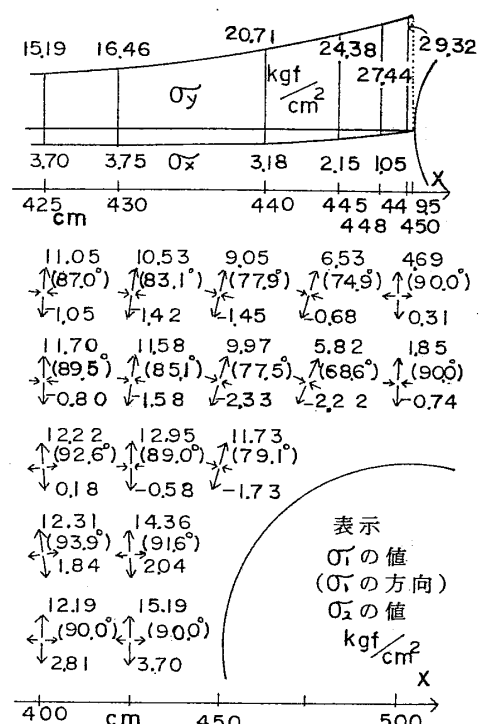


図 5 応力関数による

外力の値は変っているが、図 1-②と同じ過程である。したがって、再び以上に述べた計算を繰り返すことができる。計算を繰り返すことにより、弾性体多角形平板の内部の応力は、弾性体無限平板の応力と応力のフィルターによって、集積され一定値に収束する。計算繰り返しの打ち切りは、仮想外力の値が十分に小さくなった時点とする。切断面に分布する仮想外力を置き替えるための集中力とモーメントの計算式は、表 1 である。

3 計算例

図 3 に示す例について、無限板法による近似解を図 4 に、平板を無限に大きいと考えた場合の応力関数による解を図 5 に示す。両者はよく近似している。

4 むすび

無限板法は、静定の平面弾性問題をすべて解くことが可能であり、解析上の労力が少なく精度の良い方法である。無限板法は、弾性体無限平板の応力を重ね合わせるにより、近似解を求める方法であり、応力のフィルターという着想により、計算値を真の値に収束させることを可能にしている。

1) 岸谷孝一、平居孝之、日本建築学会論文報告集 N.224 昭和 49 年 10 月

(大分大学助教授 工学博士)