

## 二次元弾性問題の応力解析法：半無限板法\*

平 居 孝 之\*\*

Stress Analysis Method for Two-Dimensional Problems  
: Semi-infinite Plate Method.

By Takayuki HIRAI

Department of Architecture, Faculty of Engineering,  
Oita Institute of Technology

## Abstract

A new stress analysis method named Semi-infinite Plate Method (S.P.M.) which the author devised is presented. This method is available in the case that the stress is two-dimensional and the outer forces operating on it are all known. Some examples are shown in which the stress is estimated by S.P.M. comparing with the results by Finite Element Method or by Stress Function.

The conclusion tells that S.P.M. is available on limited problems but very useful to calculate the stress by less error and labor than F.E.M.

## 1. 序

半無限板法とは、作用している外力がすべてわかっている二次元問題の内部応力を、縁が凹でない弾性体多角形平板で近似して計算する方法である。

セメント類をマトリックスとする複合材料の曲げ・引張・せん断強度を測定するとき、供試体内部応力の解析を有限要素法を用いて行っていたが入力データに手間がかかる割には計算結果に対する要素分割の影響が大きくて不便を感じていた。そこで計算精度の良い方法の開発を試み、利用範囲はかぎられているが入力データの手間が少く計算値の精度が良い半無限板法を考案した。ここでは半無限板法について説明し、有限要素法や応力関数による厳密解等と比較しながらいくつか計算例を示す。

## 2. 半無限板法

図1の①に示す様な弾性体平板に外力が作用して釣合っている場合の内部応力を計算するために、②に示す多

角形平板で近似させる。半無限板の縁上に点Aに作用している外力と同値の集中力が作用した時の半無限板内部応力は、図2<sup>(1)</sup>の様計算で求めこれを $\sigma_{A1}$ とする。この半無限板を③の様④と同じ形状の多角形平板で点線のごとく切り取り、点線内の応力が切り取った後も変化しない様な仮想外力が縁上に作用していると考え。同じ事を⑤⑥の様外力の作用している他の点についても行って重ねると、⑦に示す様に④に仮想外力が作用した場合となり、このときの内部応力は $\sum_{\alpha=A}^n \sigma_{\alpha 1}$ で計算される。この仮想外力を解除するため⑧のごとく仮想外力を打消す外力を与える。この外力の縁に垂直方向成分の単位面積当たり全縁周にわたる平均値を応力のフィルター $\overline{\sigma_{j1}}$ とすると、⑨に示す外力は応力のフィルター $\overline{\sigma_{j1}}$ が作用している⑩と残りの成分が作用している⑪にわけられる。この⑪の場合を⑫の様集中外力により近似させれば、これは外力の状態が変化しただけで④に示した計

\* 昭和51年4月21日 \*\*工学博士 建築学科講師

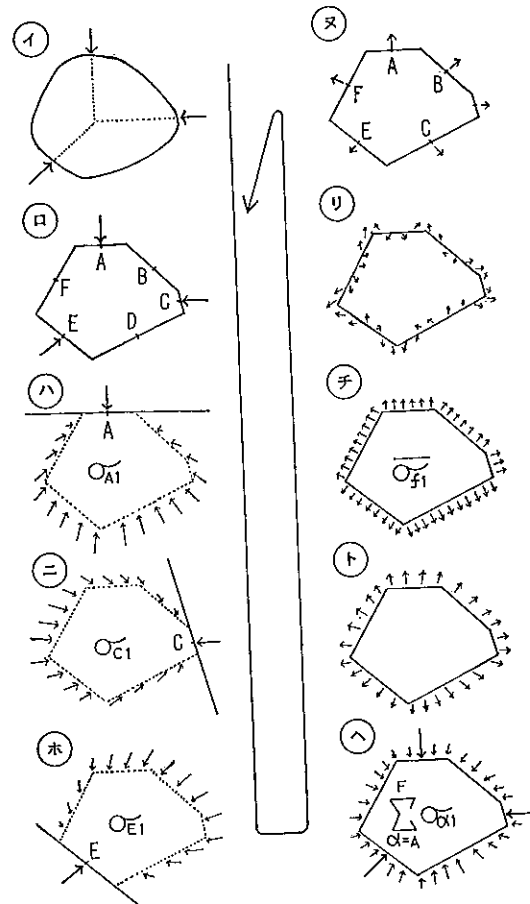


図1 半無限板法

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

注: 半無限板厚さ

応力関数  $\chi = -\frac{P}{\pi r} \theta \sin \theta$

図2 半無限板内部応力

算開始の場合と同じであり、計算を繰返すことが出来る。この繰返し計算により内部応力は半無限板内部応力  $\Sigma \sigma_{ni}$  と応力のフィルターによる内部応力 ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{fj}$ ,  $\tau_{xy} = 0$ ) によって次式の様に集積されていく。

$$\left\{ \left( \sum_{n=1}^m \sigma_{ni} \right) + \overline{\sigma_{fj}} \right\} + \left\{ \left( \sum_{n=1}^m \sigma_{ni} \right) + \overline{\sigma_{fj}} \right\} + \dots = \left\{ \left( \sum_{n=1}^m \sigma_{ni} \right) + \overline{\sigma_{fj}} \right\} \dots \text{①}$$

また仮想外力打消し計算を数回続けて行った後、応力のフィルターをまとめて作用させる方法では②式となる。

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \left( \sum_{n=1}^m \sigma_{ni} \right) + \overline{\sigma_{fj}} \right\} \dots \text{②}$$

分布荷重を集中力で置き換える操作をするので集中力作用点近くの誤差を調べなければならない。そのため図3に示す様に単位厚さの半無限板の縁に等分布荷重がかかっているときに、これを5つの外縁分割例についてy軸上の応力  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  の計算値と真の応力  $\sigma_x = \sigma_y = -w/A$  を比較すると最小分割間隔を  $a$  として  $y < a$  では差が大きく、 $a < y < A$  では僅かに異り、 $A < y$  ではほとんど等しいことがわかる。これはサン・ブナンの定理<sup>(1)</sup>と一致する。それゆえ内部応力計算点を近くにもつ外縁は、集中力作用点から隣りの作用点までの間隔と同じ距離以上離れたところに内部応力計算点がある様に、集中力作用点を設定しなければならない。

集中荷重作用点分割例	等分布荷重/単位長さ A	計算長さ=1266 A
分割例1 $a=A$		
分割例2 $a=1/2 A$		
分割例3 $a=1/4 A$		
分割例4 $a=1/8 A$		
分割例5 $a=1/16 A$		

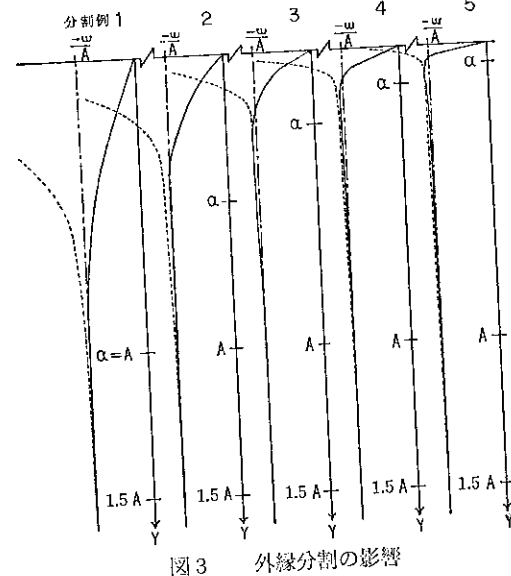


図3 外縁分割の影響

3. 計算例1 割裂引張試験

図4に示すシリンダーを用いた割裂引張試験<sup>(2)</sup>について供試体を弾性体2次元平面応力状態と考えたときのx軸y軸上の主応力度を半無限板法、応力関数、有限要素法により計算した値を図5にx軸方向を  $\sigma_x$ , y軸方向を  $\sigma_y$  として示す。主応力度表示点のxy座標は半無限板法と応力関数では一致している。これに対して有限要素法では隅隅について要素を設定したためx軸あるいはy軸に接する辺長0.5cmの三角形要素の主応力度で重心の座標に合わせて表示してある。有限要素法では要素分割の影響が大きく、特に主応力度の方向を示す角度は要素設定に工夫を加えても誤差が生じやすいが、半無限板法

ではそのようなことはなく、入力データの作成が簡単で計算値の近似性が良い。

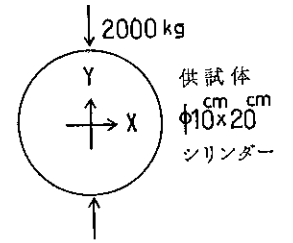
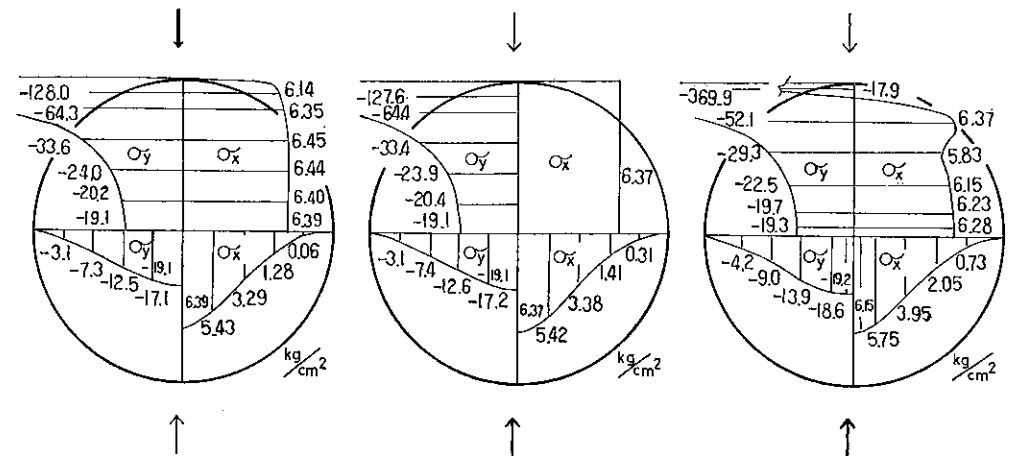


図4 割裂引張試験  
φ10cm×20cm シリンダー供試体



外縁分割点96	内部計算点32	プログラム285行	データ130行	計算時間20秒	(HITAC8700/8800)
半無限板法		要素数161		節点数99 (1/4円)	
半無限板法		プログラム322行		データ262行	
半無限板法		計算時間38秒		(HITAC8700/8800)	
半無限板法		有限要素法		計算時間38秒	

図5 割裂引張試験の内部応力

4. 計算例2 曲げ試験

セメントの物理試験方法<sup>(3)</sup>の曲げ試験について荷重を100kgとして行った計算結果を図6に示す。図7に仮想外力解除を繰り返したときの供試体中央断面のx方向主応力度の計算値の変化をまた最終状態における仮想外力と内部応力度を図8に示す。この最終状態における計算値とKarmanの解<sup>(4)</sup>を用いた計算値を比較すると図6のように両者がよく近似している。x座標が両端の支持点に近い計算点では  $\sigma_x$  の値に差が出るが、これは Kar-

man の解が左右の支持点より供試体せい以内の部分で支持点の影響を含んでいないためと考えられる。

5. 計算例3 逆対称載荷試験

逆対称載荷試験の内部応力度計算値を図9に示す。このモデルの内部応力についてはFilonの解<sup>(5)</sup>を利用出来るが計算式が多すぎて実用的でない。有限要素法では望ましい精度に近づけるため要素を多くすると入力データ作成が非常に困難で、要素が200程度では誤差が非常に大きい。このようなモデルの場合に、半無限板法が非常

に便利で有効な方法である。

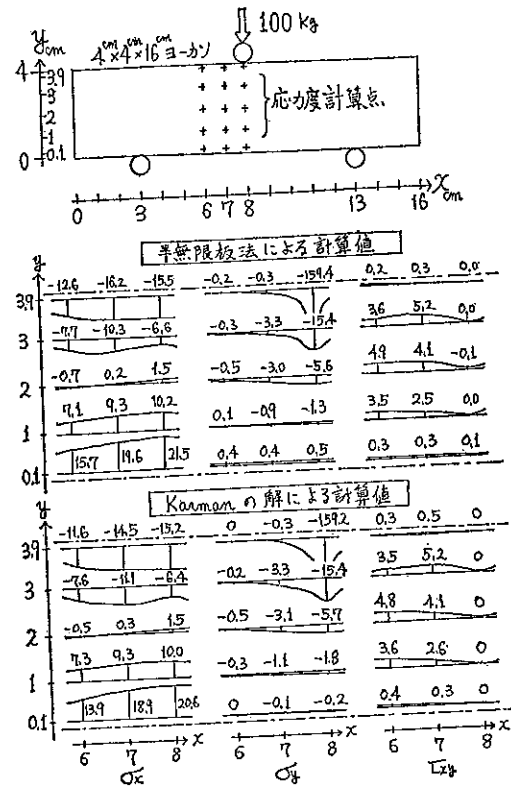


図6 曲げ試験

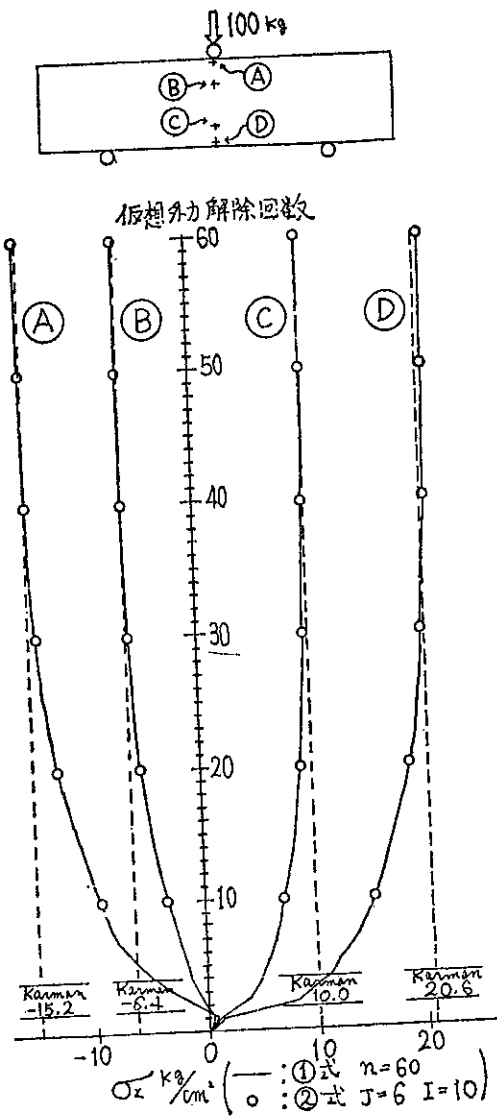


図7 計算過程

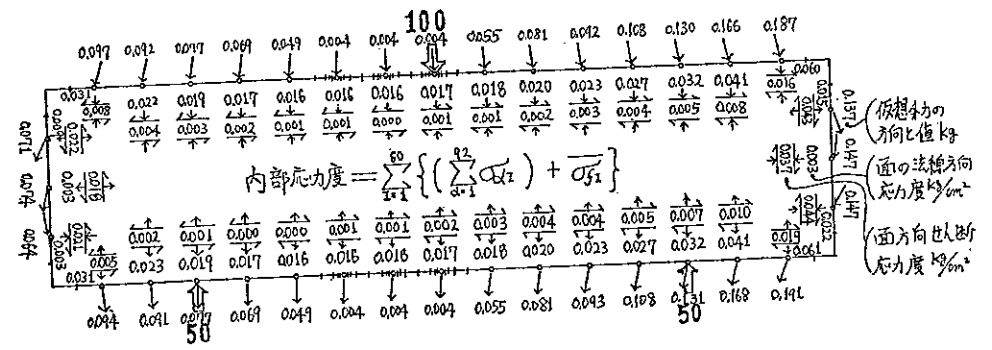


図8 最終状態

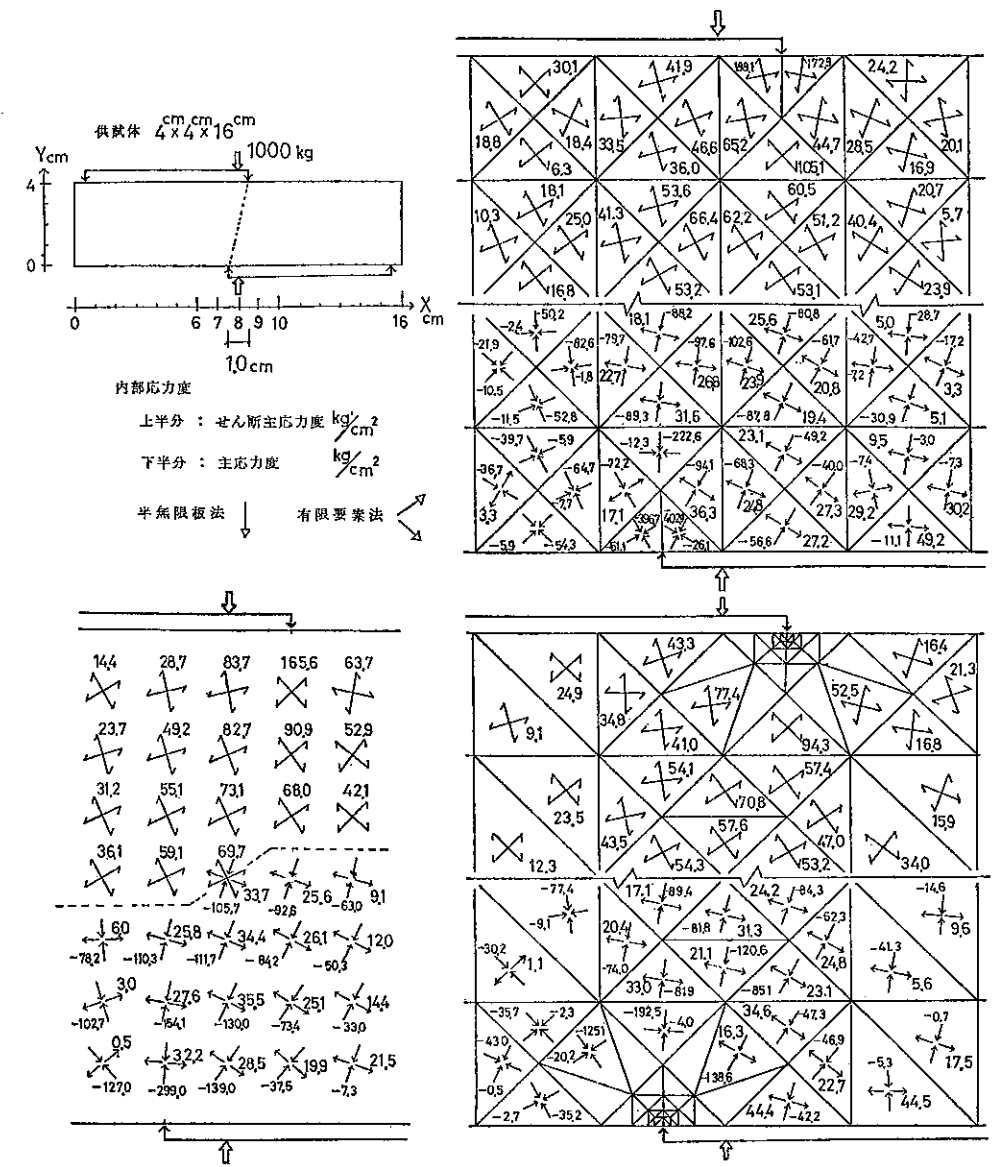


図9 逆対称載荷試験の内部応力

6. むすび

二次元静定問題の弾性解を求めるために考案した半無限板法の紹介を行った。適用出来る範囲はかぎられているが計算誤差が少く、非常に便利な方法であり、利用可能な問題をお持ちの方はぜひ試みられたい。なお半無限板法のプログラムの詳細は日本建築学会論文報告集、第224号 昭和49年10月を参照。

文献

1. S. P. Timoshenko, J. N. Goodler "Theory of Elasticity" McGraw-Hill Book Company
2. JIS A 1113 コンクリートの引張強度試験方法
3. JIS A 5201 セメントの物理試験方法
4. L. N. G. Filon Trans, Roy, Soc (London) ser. A. Vol. 201 p63 1903